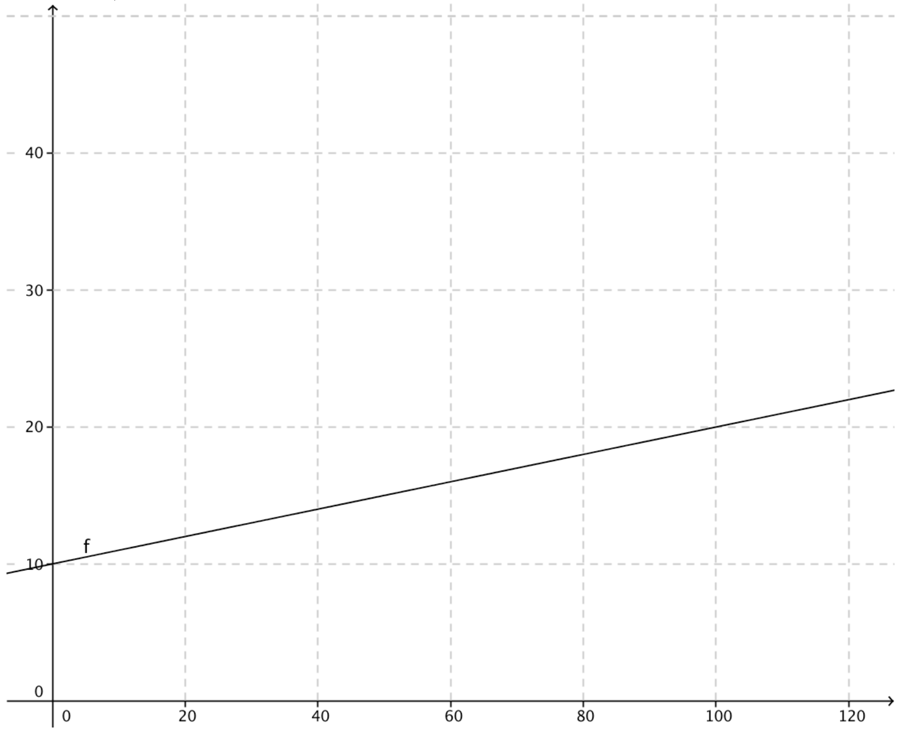
Problema 1

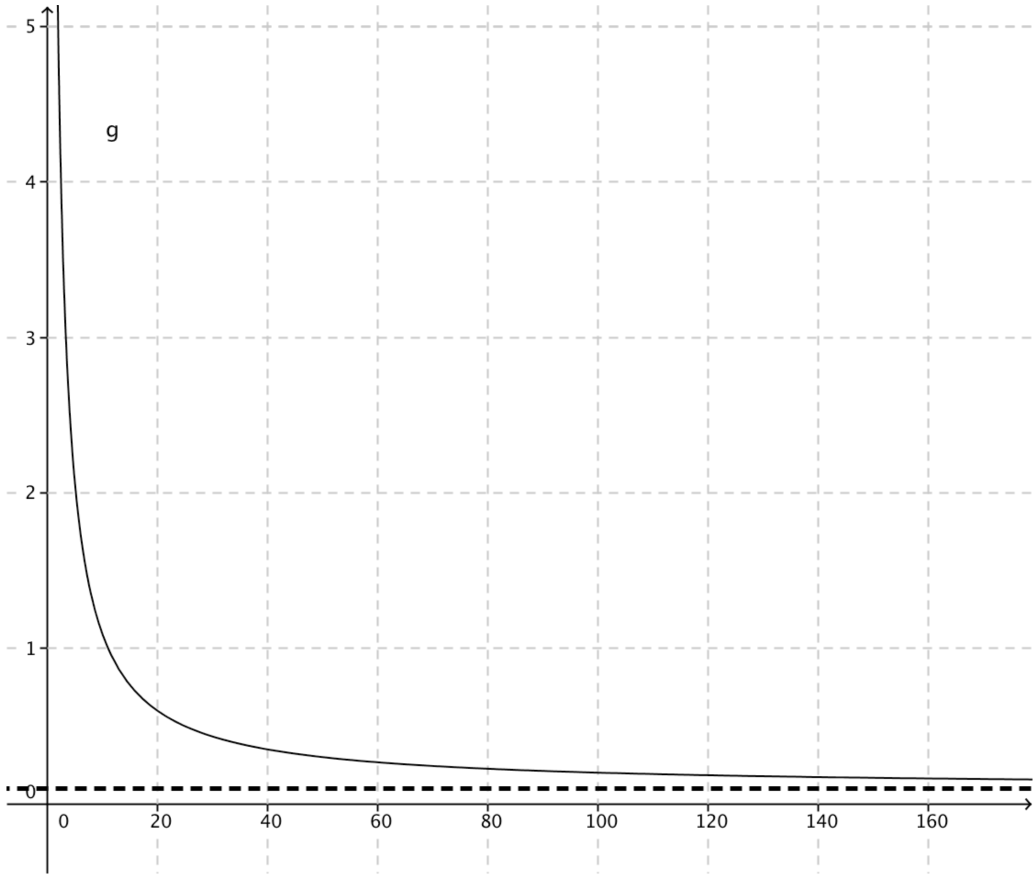
Indicato con x il numero di minuti di telefonate mensili, tale numero deve essere non negativo e non deve superare il numero di minuti in un mese (60·24·30 = 43200): quindi $0 \le x \le 43200$.
La funzione dei costi totali è data dalla somma del costo fisso, di 10 euro, e del costo variabile, dato da 0,1*x* euro. Avremo pertanto:

$f(x) = 10 + 0{,}1x$ (con $0 \le x \le 43200$)

Tenuto conto che il costo medio è dato dal rapporto tra il costo totale mensile ed il numero di minuti di conversazione in un mese, si ha:
$g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{10 + 0{,}1x}{x} = \frac{100 + x}{10x}$ (con $0 \le x \le 43200$).
Rappresentazione grafica di *f*: si tratta di una semiretta (o di un segmento, se si tiene conto anche della limitazione superiore della *x*, che, però, d'ora in poi trascureremo) crescente con ordinata all'origine 10 e con pendenza 1/10. Rappresenta la crescita uniforme del costo totale mensile, al crescere del numero di minuti di conversazione *x*:



Rappresentazione grafica di *g*: si tratta di una funzione omografica, il cui grafico è un ramo di iperbole (tenuto conto delle limitazioni di *x*) con asintoto orizzontale $y = \frac{1}{10}$ e asintoto verticale $x = 0$:



Il grafico è decrescente; all'aumentare del numero di minuti di conversazione, il costo medio decresce verso il valore della tariffa al minuto, poiché il costo fisso di 10 euro viene "diluito" su un numero sempre più elevato di minuti e diventa trascurabile rispetto al costo della chiamata al minuto. Essendo un ramo d'iperbole, essa è monotona decrescente e pertanto non presenta massimi o minimi relativi.

2) La condizione $g(x_1)=\dfrac{g(x_0)}{2}$ può essere riscritta come:

$\dfrac{100+x_1}{10x_1}=\dfrac{g(x_0)}{2}$, dalla quale si ricava:

$$100+x_1=g(x_0)\cdot 5x_1$$

$$x_1\left(5g(x_0)-1\right)=100$$

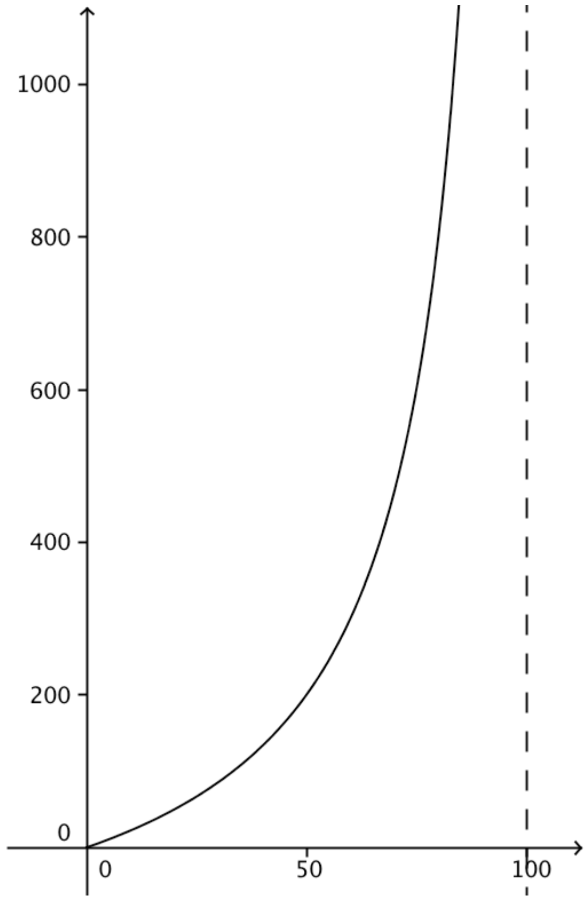
$$x_1=\frac{100}{5g(x_0)-1}$$

$$x_1=\frac{100}{5\dfrac{100+x_0}{10x_0}-1}$$

Si ottiene, infine:

$$x_1=\frac{200x_0}{100-x_0}$$

Si tratta ancora di un'iperbole omografica; il suo grafico è un ramo d'iperbole con asintoti x_1 = -200 e x_0 = 100, limitato dalle condizioni $x_0 \geq 0$ e $x_1 \geq 0$. Il suo grafico è il seguente:



Non esistono valori di x_1 tali che $g(x_1)=\frac{g(x_0)}{2}$, quando x_0 = 100. Infatti, tenuto conto che $g(100)=\frac{100+100}{1000}=0{,}2$ e che quindi $\frac{g(100)}{2}=0{,}1$, si dovrebbe avere $g(x_1)=0{,}1$, il che è impossibile, dato che y = 0,1 è l'asintoto orizzontale della funzione g.

Per $x_0 \to 100^-$, $g(x_0)\to 0{,}2^+$, $\frac{g(x_0)}{2}\to 0{,}1^+$, $g(x_1)\to 0{,}1^+$. Leggendo il grafico di g, si vede che esso tende a 0,1 dall'alto per valori di x tendenti a +∞. Ciò comporta che $x_1 \to +\infty$, ovvero che la funzione che lega x_1 a x_0 deve avere un asintoto verticale in x_0 = 100.

3) Il margine superiore della zona "coperta" da segnale telefonico è una parabola, passante per A(0;2) e presumibilmente con vertice in C(4;4). La sua equazione sarà:

$y-4=a(x-4)^2$. Dal passaggio per A si ottiene $a=-\frac{1}{8}$ e l'equazione della parabola sarà:

$y=-\frac{1}{8}x^2+x+2$. È immediato verificarne il passaggio per B(2; 7/2).

L'area del sottografico è data da $Area=\int_0^6\left(-\frac{1}{8}x^2+x+2\right)dx$ = 21 (km²).

L'area della regione Z è ½.
L'area della regione "coperta" da segnale è allora 21 – ½ = 41/2.

Il rapporto fra l'area coperta e l'area totale è allora di $\frac{\frac{41}{2}}{21}$ = 41/42 = 0,976 > 0,96. Quindi la zona coperta dal segnale telefonico è addirittura più estesa di quanto dichiarato sul sito web.

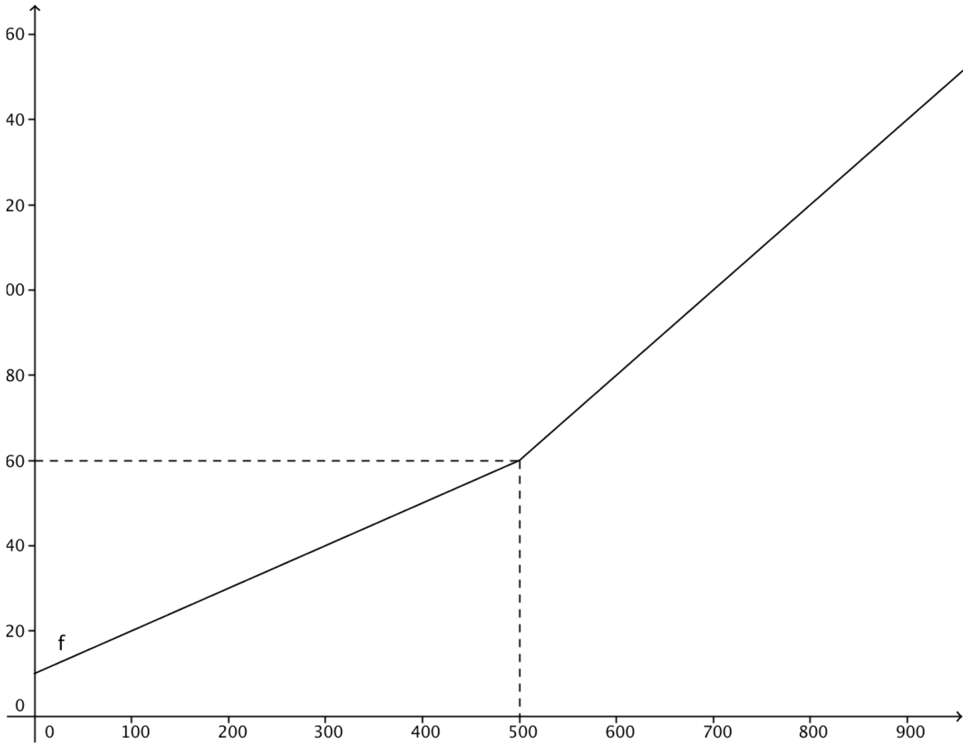
4) Con la modifica del piano tariffario, si ha:

$$f(x) = \begin{cases} 10 + 0{,}1x & 0 \le x \le 500 \\ 10 + 0{,}1 \cdot 500 + 0{,}2(x - 500) & x > 500 \end{cases}$$

ovvero,

$$f(x) = \begin{cases} 10 + 0{,}1x & 0 \le x \le 500 \\ 0{,}2x - 40 & x > 500 \end{cases}$$

L'andamento della funzione è il seguente:

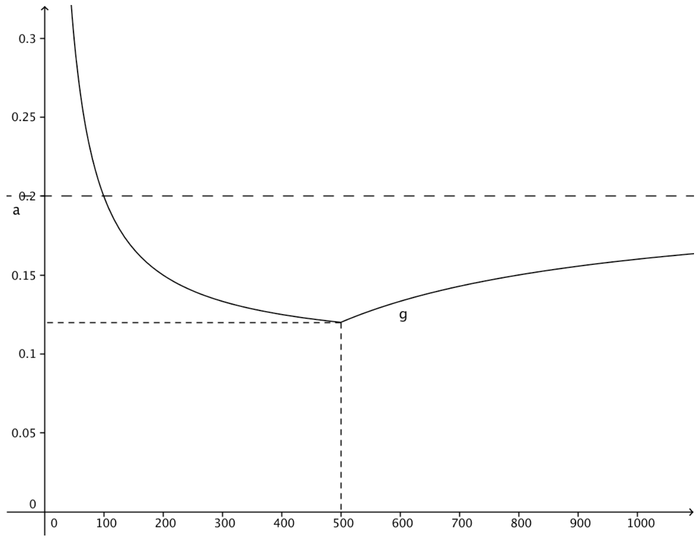


Non presenta asintoti; è monotona crescente, continua in ogni punto, derivabile ovunque, eccetto in $x = 500$ (punto angoloso). La derivata destra e quella sinistra nel punto coincidono con le pendenze delle due semirette e valgono rispettivamente 0,2 e 0,1. Il grafico ha un minimo assoluto in $x = 0$ (eventualmente un massimo assoluto in $x = 43200$ se si considera anche la limitazione superiore della x). La funzione di costo totale, come nel punto 1), è monotona crescente, ma raddoppia la velocità di crescita dopo i primi 500 minuti, raddoppiando il costo al minuto.

Per quanto riguarda il costo medio, si ha:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{10}{x} + \dfrac{1}{10} & 0 \le x \le 500 \\ \dfrac{1}{5} - \dfrac{40}{x} & x > 500 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{100 + x}{10x} & 0 \le x \le 500 \\ \dfrac{x - 200}{5x} & x > 500 \end{cases}$$

Il grafico è l'unione di due rami di iperboli equilatere traslate (o di due iperboli omografiche):



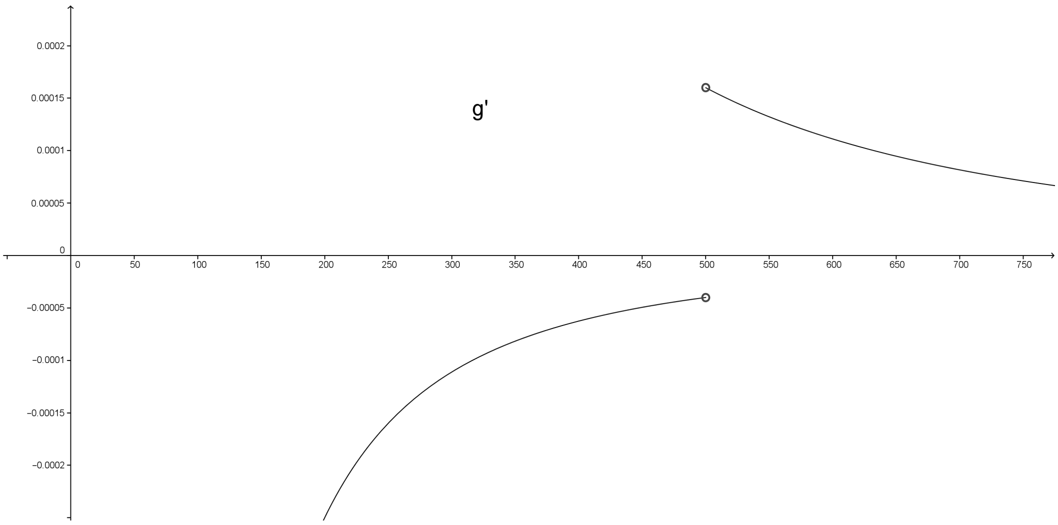
La funzione g presenta un asintoto verticale in $x = 0$ e un asintoto orizzontale in $y = 0.2$. Essa è decrescente nel primo tratto, crescente per $x > 500$. Dall'uguaglianza dei limiti destro e sinistro in $x = 500$ e di $g(500)$ si deduce la continuità in tale punto; la funzione g è quindi continua in ogni suo punto.

Per quanto riguarda la derivabilità, la funzione è derivabile in tutti i suoi punti perché lo sono i singoli tratti (ciascuno è somma di funzioni derivabili per $x > 0$); rimane da studiare la derivabilità nel punto di raccordo di ascissa $x = 500$. Per questo determiniamo le derivate di ciascun ramo della funzione:

$$g'(x) = \begin{cases} -\dfrac{10}{x^2} & 0 \leq x < 500 \\ \dfrac{40}{x^2} & x > 500 \end{cases}$$

La derivata sinistra vale -1/25000, mentre la derivata destra vale 4/25000. Avendo valori diversi, la funzione g non è derivabile in $x = 500$. Essa presenta un punto angoloso. La funzione g presenta un minimo assoluto nel punto angoloso e non ha massimi assoluti, essendo superiormente illimitata.

La funzione g', il cui grafico è rappresentato in figura, non presenta invece né massimi né minimi assoluti (si noti che, per la non derivabilità in $x = 500$, la funzione derivata non è definita in tale punto; pertanto in tale ascissa non è presente un massimo assoluto, ma estremo superiore)



Il secondo ramo di g è un ramo d'iperbole che, con un'inversione di tendenza rispetto al primo ramo, a partire dal punto (500; 0,12) cresce, tendendo asintoticamente al valore 0,2 (costo di un minuto di conversazione), esattamente come accadeva per la funzione g nel punto 1) del problema (a causa della trascurabilità del costo fisso su un elevato numero di minuti di conversazione).
Si può notare inoltre che, effettuando 500 minuti di telefonate al mese, si ha un minimo costo medio.

Problema 2

1. Sapendo che la funzione presenta tre punti stazionari in $x = -1$, $x = 1$ e $x = 2$ (punti a tangente orizzontale) si sa anche che la sua derivata prima dovrà avere tre zeri e quindi il suo grado minimo sarà tre (non si escludono infatti altri eventuali zeri al di fuori dell'intervallo [-3;3]). In questo caso, ricordando le regole di derivazione per i polinomi, si deduce che il polinomio che può rappresentare *f* è come minimo di quarto grado.
   Si può anche arrivare alla stessa conclusione analizzando il numero degli zeri della funzione *f*: dal grafico se ne deducono almeno 4, essendo lo zero in $x = 2$ contato almeno due volte (il grafico della funzione *f* è infatti tangente all'asse *x* in $x = 2$).

2. $f(x) = g'(x)$ quindi:
   nell'intervallo $-3 < x < -2$ g(x) decresce perché $g'(x) < 0$
   nell'intervallo $-2 < x < 0$ g(x) cresce perché $g'(x) > 0$
   il punto di ascissa $x = -2$ è un punto di minimo relativo per g(x)
   nell'intervallo $0 < x < 2$ g(x) decresce perché $g'(x) < 0$
   il punto di ascissa $x = 0$ è un punto di massimo relativo
   nell'intervallo $2 < x < 3$ f(x) decresce perché $g'(x) < 0$
   il punto di ascissa $x = 2$ è un punto di flesso a tangente orizzontale

   g(x) rivolge la concavità verso l'alto quando g'(x) cresce quindi negli intervalli:

   $-3 < x < -1$ o $1 < x < 2$

3. Ricordando dal teorema fondamentale del calcolo integrale che

   $\int_x^3 f(t)dt = g(3) - g(x)$ si ottiene $g(x) = g(3) - \int_x^3 f(t)dt$

   e quindi $g(0) = g(3) - \int_0^3 f(t)dt$. Dal grafico della funzione $y = f(x)$ si può calcolare $\int_0^3 f(t)dt = -4$, interpretando l'integrale definito come area con segno compresa tra la curva di equazione $y = f(x)$ e l'asse x nell'intervallo [0;3] e quindi ottenere $g(0) = g(3) - \int_0^3 f(t)dt = -5 + 4 = -1$.

   $\lim_{x\to 0} \frac{1+g(x)}{2x} = \frac{0}{0}$
   Applicando il teorema di De L'Hopital (le cui ipotesi sono tutte verificate, dal momento che il numeratore è somma di funzioni derivabili in un intorno di 0 e che il denominatore è un polinomio di primo grado, quindi derivabile in un intorno di 0, con derivata che non si annulla mai in tale intorno) si ottiene
   $\lim_{x\to 0} \frac{1+g(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{2} = \frac{g'(0)}{2} = \frac{f(0)}{2}=0$
   dopo aver dedotto dal grafico $f(0) = 0$.
4. Per calcolare l'integrale richiesto bisogna effettuare la sostituzione
   $2x + 1 = t$, da cui
   $2dx = dt$; per gli estremi di integrazione, se *x*=-2 allora *t*=-3 e se *x*=1 allora *t*=3.
   L'integrale si può allora riscrivere così:
   $\int_{-2}^{1} h(x)\, dx = \frac{3}{2}\int_{-3}^{3} f(t)dt = \frac{3}{2}(-2 + 3 - 3 - 1) = -\frac{9}{2}$,

interpretando l'integrale definito $\int_{-3}^{3} f(t)dt$ come area con segno compresa tra la curva di equazione $y = f(x)$ e l'asse x nell'intervallo [-3;3].

Questionario

Quesito 1)

$$f(x) = \int(-2x^2 + 6)dx = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + c$$

Per determinare c è possibile imporre le condizioni di tangenza fra due curve:

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}x^3 + 6x + c = -2x + 5 \\ -2x^2 + 6 = -2 \end{cases} \text{ da cui } \begin{cases} -\frac{2}{3}x^3 + 8x + c = 5 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} +\frac{16}{3} - 16 + c = 5 \\ x = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} c = -\frac{16}{3} + 21 \\ x = -2 \end{cases} \text{ quindi } f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + \frac{47}{3}$$

Si potrebbe in alternativa, dato che la retta $y = -2x+5$ è tangente al grafico di f, trovare in quali punti la derivata di f abbia valore -2:

$$-2x^2 + 6 = -2$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

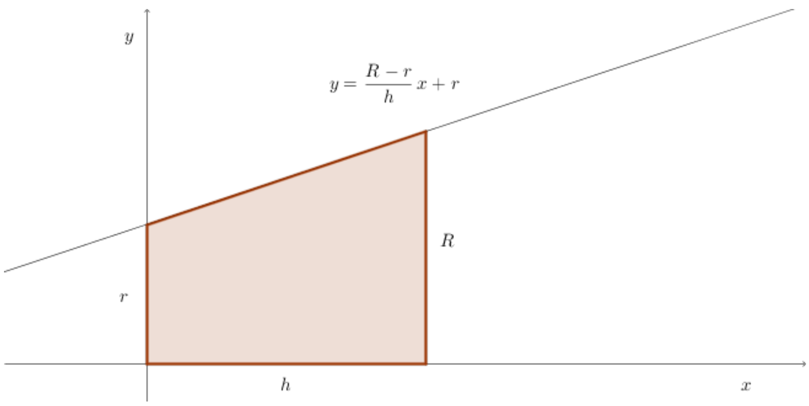
Accettato il solo valore $x = -2$ (perché il punto di tangenza è nel secondo quadrante), si può imporre che siano uguali le ordinate della retta tangente e della funzione

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + c$$

per tale valore di x. Si troverà così $c = 47/3$.

Quesito 2

Si può determinare il volume del tronco di cono considerandolo generato dalla rotazione del trapezio colorato in figura attorno all'asse x.

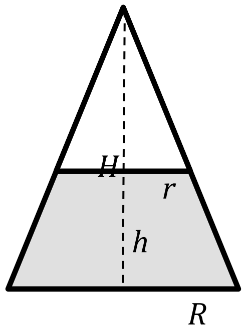


La retta su cui giace il lato obliquo del trapezio ha equazione $y = \frac{R-r}{h}x + r$ (ottenibile imponendo il passaggio per i punti $(0; r)$ e $(h; R)$.

Il volume V del tronco di cono è dato dall'integrale

$$V = \int_0^h \pi[y(x)]^2 dx = \int_0^h \pi\left[\frac{R-r}{h}x + r\right]^2 dx = \pi\int_0^h \left[\left(\frac{R-r}{h}\right)^2 x^2 + 2r\frac{R-r}{h}x + r^2\right] dx$$
$$= \pi\left[\left(\frac{R-r}{h}\right)^2 \frac{h^3}{3} + 2r\frac{R-r}{h}\frac{h^2}{2} + r^2 h\right]$$
Semplificando, si ottiene l'espressione cercata:
$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + rR)$$

Altrimenti, il volume V_T del tronco di cono può essere visto come differenza fra il volume V del cono integro e il volume v della parte troncata.
Usando la nota formula per il volume del cono di altezza a e raggio di base b, $V_{cono} = \frac{\pi a b^2}{3}$, si ha:



$V = \frac{\pi H R^2}{3}$ (R è il raggio di base, H è l'altezza), $v = \frac{\pi(H-h)r^2}{3}$ (r è il raggio di base, $H-h$ è l'altezza).
Esprimendo H in funzione dei dati (h, r e R), si ottiene, sfruttando la proporzionalità fra lati di triangoli simili, $H = \frac{R}{R-r}h$.
Sostituendo, si arriva a $V = \frac{\pi h R^3}{3(R-r)}$ e $v = \frac{\pi h r^3}{3(R-r)}$.
Si conclude con $V_\mathrm{T} = V - v = \frac{\pi h(R^3 - r^3)}{3(R-r)} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + rR)$.

Quesito 3

p(al più due volte testa) = p(0 volte testa) + p(1 volta testa) + p(2 volte testa) =
$$= \binom{6}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^6(1+6+15) = \frac{11}{32}$$
p(almeno due volte testa) = 1- p(0 volte testa) - p(1 volta testa) =
$$= 1 - \binom{6}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6 - \binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6(1+6) = 1 - \frac{7}{64} = \frac{57}{64}$$

Quesito 4

$y' = \frac{1-\ln x}{x^2}$ e $y'' = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$ sostituendo nella quarta equazione differenziale si ottiene $x^2 \cdot \frac{2\ln x - 3}{x^3} + x \cdot \frac{1-\ln x}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{\ln x}{x}$ allora $\frac{2\ln x - 3 + 1 - \ln x + 2}{x} = \frac{\ln x}{x}$ da cui $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln x}{x}$
Poiché si ottiene un'identità, la funzione assegnata è soluzione dell'equazione differenziale.

Quesito 5

Il vettore perpendicolare al piano è $(1,1,-1)$, la retta dovrà passare per l'origine e avrà equazione parametrica $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$ o equazione cartesiana $\begin{cases} x = y \\ z = -x \end{cases}$

Quesito 6

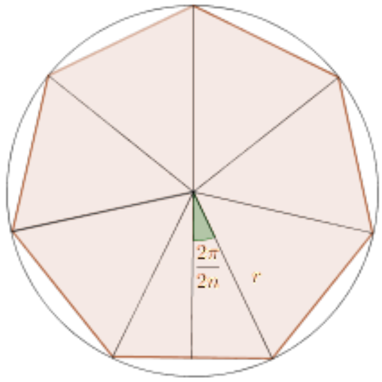
$f'(x) = 2(x-1) + 2(x-2) + 2(x-3) + 2(x-4) + 2(x-5) = 10x - 30$

La funzione avrà un punto stazionario in $x = 3$, studiando il segno della derivata si capisce che $x = 3$ è un minimo; allora $Min(3,10)$

Allo stesso risultato si giungerebbe sviluppando i quadrati e riconoscendo che la funzione quadratica ha come grafico una parabola concava verso l'alto, che presenta quindi un minimo assoluto nel suo vertice (3, 10).

Quesito 7

Congiungendo il centro della circonferenza con i vertici del poligono, questo si divide in n triangoli isosceli, ciascuno dei quali ha angolo al vertice di valore $\frac{2\pi}{n}$.



L'area di ciascuno di questi triangoli vale

$$a = \frac{1}{2} 2 \cdot r \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{2n}\right) \cdot r \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right) = \frac{1}{2} r^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

(allo stesso risultato si può giungere anche sfruttando la formula goniometrica che fornisce l'area di un triangolo: $a = \frac{1}{2} r \cdot r \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$)

Perciò, l'area del poligono vale

$$A(n) = \frac{n}{2} r^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

come indicato.

Inoltre, $\lim_{n\to+\infty} A(n) = \frac{r^2}{2} \lim_{n\to+\infty} \left[n \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]$.

Questo può essere ricondotto al limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, tramite la sostituzione $x \equiv \frac{2\pi}{n}$. Si ottiene:

$$\lim_{n\to+\infty} A(n) = \frac{r^2}{2} \lim_{x\to 0} 2\pi \frac{\sin x}{x} = \pi r^2$$

Il valore, come atteso, è quello dell'area del cerchio circoscritto al poligono.

Quesito 8

Sia α uno dei due angoli alla base, $\cos\alpha = \frac{\frac{5}{2}}{6} = \frac{5}{12}$ e $sen\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{\sqrt{119}}{12}$

Tenuto conto che l'area dei tre settori circolari è complessivamente quella di un semicerchio (essendo uguale ad un angolo piatto la somma degli angoli interni ad un triangolo) di raggio 2, la probabilità richiesta vale:

$$p = \frac{\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot sen\alpha - \pi \cdot 2}{\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot sen\alpha} = 1 - \frac{2\pi}{\frac{5\sqrt{119}}{4}} = 1 - 0{,}46 = 0{,}54 = 54\%$$

Oppure $h = \frac{\sqrt{119}}{2}$ allora $A = \frac{5\sqrt{119}}{4}$ quindi

$$p = \frac{\frac{5\sqrt{119}}{4} - \pi \cdot 2}{\frac{5\sqrt{119}}{4}} = 1 - \frac{2\pi}{\frac{5\sqrt{119}}{4}} = 1 - 0{,}46 = 0{,}54 = 54\%$$

Quesito 9

La funzione è continua in $[0,2]$ per qualsiasi valore di k; la funzione deve essere derivabile in $[0,2]$ per cui $\lim_{x\to 1^-} 3x^2 = \lim_{x\to 1^+}(2x-k)$ allora $2-k=3$ quindi $k=-1$.

Allora $y = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2+x-1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$ e $y' = \begin{cases} 3x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 2x+1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$

Per trovare il punto la cui esistenza è assicurata dal teorema, occorre che sia

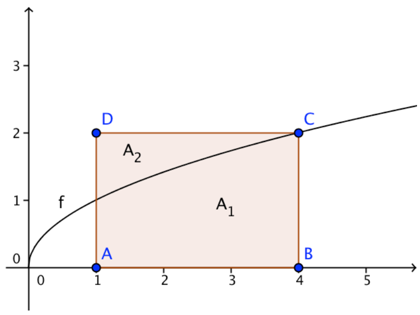
$3x^2 = \frac{f(2)-f(0)}{2}$ da cui $3x^2 = \frac{5}{2}$ cioè $x = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$ ma $-\sqrt{\frac{5}{6}}$ non è accettabile.

$2x+1 = \frac{f(2)-f(0)}{2}$ da cui $2x+1 = \frac{5}{2}$ cioè $x = \frac{3}{4}$. Anche questo valore non è accettabile.

Pertanto l'unico valore accettabile in $[0,2]$ è $x = \sqrt{\frac{5}{6}}$.

Quesito 10

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{6-A_1}{A_1} = \frac{6}{\int_1^4 \sqrt{x}\,dx} - 1 = \frac{6}{\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^4} - 1 = \frac{6}{\frac{14}{3}} - 1 = \frac{2}{7}$$



(Soluzioni a cura dei proff. Daniela Capelli, Silvano Gregori, Marco Maianti, Nicoletta Nolli)