Sessione suppletiva 2015
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

(Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sei stato incaricato di progettare una pista da ballo all'esterno di un locale in costruzione in una zona balneare. Il progetto prevede, oltre alla pista, delle zone verdi e una tettoia che consenta l'uso della pista anche in caso di pioggia.

La pista da ballo viene rappresentata, in un sistema di riferimento cartesiano *Oxy* in cui l'unità di misura corrisponde a 1 metro, all'interno del rettangolo avente come vertici i punti di coordinate (-4, 0), (4, 0), (-4, 25) e (4, 25); nella scelta della sagoma della pista va rispettato il vincolo urbanistico che stabilisce che essa non può occupare più del 60% della superficie di tale rettangolo.

Un tuo collaboratore predispone due soluzioni: la prima è rappresentata dalla parte di piano compresa tra l'asse x e la curva di equazione, $y = -\frac{25}{16}x^2 + 25$, $x \in [-4, 4]$, la seconda dalla parte di piano compresa tra l'asse x, la curva di equazione $y = \frac{100}{4+x^2}$ e le rette $x = -2\sqrt{3}$, $x = 2\sqrt{3}$.

1. Studia le due soluzioni, e traccia il grafico di entrambe nel riferimento cartesiano *Oxy*. Individua in particolare le caratteristiche delle due funzioni che sono più rilevanti nella fase di costruzione della pista: eventuali punti di massimo e di minimo, di flesso, angolosi.

Il proprietario del locale sceglie la seconda soluzione, che ritiene più elegante, ma ti chiede di realizzare due aiuole nelle porzioni di terreno comprese tra le due curve che gli hai proposto.

2. Determina l'area della soluzione scelta e verifica che essa rispetti i vincoli urbanistici, in modo da poter poi procedere all'acquisto del materiale necessario per la costruzione della pista.

Poiché lo scavo effettuato ai lati della pista ha reso il terreno scosceso, hai fatto eseguire delle misure e hai verificato che sia per $x \in [-2\sqrt{3}, 0]$ che per $x \in [0, 2\sqrt{3}]$ la profondità dello scavo stesso varia con la legge lineare rappresentata dalla funzione $f(x) = |x| + 1$; è dunque necessario acquistare del terreno per riempire lo scavo e realizzare le aiuole richieste.

3. Calcola quanti metri cubi di terreno vegetale sono necessari per riempire l'aiuola delimitata dalle suddette curve nell'intervallo $[-2\sqrt{3}, 0]$.

Per realizzare la tettoia, è necessario usare un piano leggermente inclinato, per favorire il deflusso della pioggia. Nel sistema di riferimento cartesiano *Oxyz*, tale piano deve passare per i punti (-4, 0, 5), (4, 0, 5) e (0, 25, 4), in modo che la quota vari gradualmente dai 5 metri in corrispondenza dell'inizio della pista, ai 4 metri in corrispondenza della fine della pista stessa.

4. Determina l'equazione del piano prescelto.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

(Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

PROBLEMA 2

La rotazione intorno all'asse x dei grafici della famiglia di funzioni:

$$f_k(x) = \frac{x}{4k}\sqrt{k^2 - x} \quad con \ x \in \Re, \qquad 0 \le x \le k^2, \qquad k \in \Re, \qquad k > 0$$

genera dei solidi di rotazione di forma aerodinamica.

1. In un riferimento cartesiano *Oxy*, traccia i grafici delle funzioni $f_k(x)$, per $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ e determina il valore di k per il quale il volume del solido di rotazione assume il valore $\frac{64\pi}{192}$;
2. calcola il diametro massimo dei solidi di rotazione in funzione di k, e determina il valore dell'angolo formato dalla tangente al grafico di f_k con l'asse x per $x = 0$;
3. assumendo che la distribuzione della massa sia omogenea, il baricentro del corpo di rotazione si trova sull'asse x, per ragioni di simmetria. Determina l'ascissa x_s del baricentro in funzione del parametro k, sapendo che vale:

   $$x_s = \frac{\pi \int_a^b x[f_k(x)]^2 dx}{V}$$

   dove gli estremi di integrazione *a* e *b* vanno scelti opportunamente, e *V* indica il volume del solido di rotazione;
4. all'interno del solido di rotazione generato da f_k, per $k = 3$, si vorrebbe collocare un cilindro di raggio 0,5 e di altezza 6. Verifica se ciò è possibile, motivando la tua risposta.

Sessione suppletiva 2015
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

(Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Data la funzione integrale $\int_1^x ln(t)\, dt$, determinare per quali valori di x il suo grafico incontra la retta di equazione $y = 2x + 1$.
2. Data la famiglia di funzioni $y = -x^3 + 6kx + 33$ trovare la funzione tangente nel punto di ascissa 3 ad una retta parallela alla bisettrice del primo quadrante. Determinare l'equazione di detta tangente.
3. Vengono lanciati due dadi. Dei due punteggi, viene considerato il maggiore; se sono uguali, viene considerato il punteggio comune dei due dadi. Detto *X* il punteggio registrato, riportare in una tabella la distribuzione di probabilità di *X* e mostrare che $p(X = 3) = \frac{5}{36}$. Calcolare inoltre la media e la varianza di *X*.
4. In un sistema di riferimento cartesiano nello spazio *Oxyz* sono dati i punti *A* (−3, 4, 0) e *C* (−2, 1, 2). I tre punti *O*, *A* e *C* giacciono su un piano *E*. Determinare l'equazione che descrive il piano *E*.
5. Determinare il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta di equazione $x = 2$ della parte di piano delimitata dalla parabola di equazione $y^2 = 8x$ e dalla retta stessa.
6. Preso un punto *C* su una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, sia *M* il punto medio dell'arco *BC*. Determinare il valore massimo che può assumere l'area del quadrilatero *ABMC*.
7. Una fabbrica produce mediamente il 3% di prodotti difettosi. Determinare la probabilità che in un campione di 100 prodotti ve ne siano 2 difettosi, usando:
   - la distribuzione binomiale;
   - la distribuzione di Poisson.
8. Provare che la funzione $y = e^x - tgx$ ha infiniti zeri, mentre la funzione $y = e^x - arctgx$ non ne ha alcuno.
9. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x \cdot e^x$, adoperando la definizione di derivata.
10. Sia la derivata seconda di una funzione reale $f(x)$ data da $f''(x) = 3x - 6$. Determinare l'espressione di $f(x)$, sapendo che il grafico della funzione passa per il punto *P* (2, −7) e che l'angolo formato dalla tangente al grafico di $f(x)$ con l'asse y nel punto di ascissa $x = 0$ vale 45°.

___

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.