Problema 1: Il porta scarpe da viaggio

Risoluzione

Punto 1

Dopo aver scelto come unità di misura (dm), dai dati si ricava che la curva deve passare per i punti $A\left(0, \frac{2}{5}\right)$, $\mathrm{B}\left(1, \frac{4}{5}\right)$, $\mathrm{C}\left(2, \frac{6}{5}\right)$ e $\mathrm{D}(3, 0)$

a) L' equazione $y = \mathrm{e}^{\left(a \cdot x^2 + bx + c\right)} + (x + d)^2$ è da scartare perchè somma di una funzione esponenziale(per la quale non esiste nessun valore reale che la renda nulla), con una quantità al quadrato che è sempre non negativa, quindi $y \neq 0 \;\; \forall\, x \in \Re$, di conseguenza il punto $\mathrm{D}(3, 0)$ non può soddisfare tale equazione.

b)L'equazione $y = \dfrac{\sin^2(a \cdot x + b) + \cos^2(a \cdot x + b)}{c \cdot x + d}$ è da scartare perchè dalla prima relazione fondamentale della goniometria sappiamo che il numeratore è sempre uguale a 1 e, di conseguenza, per i valori di x per cui esiste , il punto $\mathrm{C}(3, 0)$ non può soddisfare tale equazione.

L'unica funzione che può soddisare le condizioni poste dal problema è rappresentata dalla cubica

$$y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

Punto 2

Per trovare i coefficienti *a,b,c ed* consideriamo la condizione di appartenenza alla curva dei 4 punti.

$A\left(0, \frac{2}{5}\right)$, $\mathrm{B}\left(1, \frac{4}{5}\right)$ *punto di flesso*, $\mathrm{C}\left(2, \frac{6}{5}\right)$ e $\mathrm{D}(3, 0)$

$$\begin{cases} \mathrm{d} = \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{4}{5} = a + b + c + d \\ \dfrac{6}{5} = 8 \cdot a + 4 \cdot b + 2 \cdot c + d \\ 0 = 27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d \end{cases}$$

$$\left\{a = -\frac{4}{15}, b = \frac{4}{5}, c = -\frac{2}{15}, d = \frac{2}{5}\right\} \quad \textbf{(1.1)}$$

La curva ha equazione $y = -\frac{4}{15}\cdot x^3 + \frac{4}{5}\cdot x^2 - \frac{2}{15}\cdot x + \frac{2}{5}$

$$y = -\frac{4}{15}x^3 + \frac{4}{5}x^2 - \frac{2}{15}x + \frac{2}{5} \qquad \textbf{(1.2)}$$

Punto 3

Studio della funzione

$y = -\frac{4}{15}\cdot x^3 + \frac{4}{5}\cdot x^2 - \frac{2}{15}\cdot x + \frac{2}{5}$

La funzione essendo polinomiale è definita $\forall\ x \in \mathcal{R}$, tuttavia noi la studiamo e la rappresenteremo nell'intervallo [0,3]

Non calcoliamo f(-x) perchè in tale insieme la funzione non ha simmetrie evidenti cioè non è ne pari ne dispari.

Intersezione con l'asse delle ordinate

x=0 y=$\frac{2}{5}$

Intersezione con l'asse delle ascisse

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = -\frac{4}{15}\cdot x^3 + \frac{4}{5}\cdot x^2 - \frac{2}{15}\cdot x + \frac{2}{5} \end{cases}$$

$-\frac{4}{15}\cdot x^3 + \frac{4}{5}\cdot x^2 - \frac{2}{15}\cdot x + \frac{2}{5} = 0$

$$-\frac{4}{15}x^3 + \frac{4}{5}x^2 - \frac{2}{15}x + \frac{2}{5} = 0 \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

Semplifichiamo per 2 e facciamo il m.c.m.

$-2\ x^3 + 6x^2 - \mathrm{x} + 3 = 0$

$$-2x^3 + 6x^2 - x + 3 = 0 \qquad \textbf{(1.1.2)}$$

$$-(x-3)\left(2x^2 + 1\right) = 0 \qquad \textbf{(1.1.3)}$$

***Soluzione* $x = 3$**

I punti di intersezione con gli assi li conoscevamo già e sono
$A\left(0, \frac{2}{5}\right)$ e $D(3, 0)$

Segno della funzione

y>0 $-(x-3)\left(2x^2+1\right) > 0$ per x<3 .
Quindi nell'intervallo [0,3] la funzione è sempre positiva.

Nell'intervallo [0,3] non vanno ricercati ***A.O.*** e neanche **A. Obl.** perchè è un intervallo chiuso e limitato.
Inoltre non ci sono **A.V.** perchè non ci sono punti di discontinuità.
Calcoliamo la derivata prima per studiare la monotonia della funzione ed eventuali punti di massimo o di minimo.

Calcoliamo la deirivata prima

$$\frac{d}{dx}\, y(x) = -\frac{4}{5}\, x^2 + \frac{8}{5}\, x - \frac{2}{15} \tag{1.1.4}$$

Segno della derivata prima

$$\left\{x \le 1 + \frac{1}{6}\sqrt{30},\ 1 - \frac{1}{6}\sqrt{30} \le x\right\} \tag{1.1.5}$$

y'$\geq$ 0 $\quad 1 - \frac{1}{6}\sqrt{30} \le x \le 1 + \frac{1}{6}\sqrt{30}$ y *cresce*

$y' < 0$

$$per\ \ 0 \le x < 1 - \frac{1}{6}\sqrt{30}\ \ \vee\ \ 1 + \frac{1}{6}\sqrt{30} < x \le 3\ \ y\quad decresce$$

Dall'analisi della monotonia risulta che ∃ un punto di minimo relativo per x= $1 - \frac{1}{6}\sqrt{30}$ e un massimo relativo nel punto

di ascissa x= $1 + \frac{1}{6}\sqrt{30}$

$eval\left(-\frac{4}{15}\cdot x^3 + \frac{4}{5}\cdot x^2 - \frac{2}{15}\cdot x + \frac{2}{5},\ x = 1 + \frac{1}{6}\sqrt{30}\right)$

$$-\frac{4}{15}\left(1 + \frac{1}{6}\sqrt{30}\right)^3 + \frac{4}{5}\left(1 + \frac{1}{6}\sqrt{30}\right)^2 + \frac{4}{15} - \frac{1}{45}\sqrt{30} \tag{1.1.6}$$

$$\frac{4}{5}+\frac{2}{27}\sqrt{30} \qquad \textbf{(1.1.7)}$$

$$eval\left(-\frac{4}{15}\cdot x^3+\frac{4}{5}\cdot x^2-\frac{2}{15}\cdot x+\frac{2}{5}, x=1-\frac{1}{6}\sqrt{30}\right)$$

$$-\frac{4}{15}\left(1-\frac{1}{6}\sqrt{30}\right)^3+\frac{4}{5}\left(1-\frac{1}{6}\sqrt{30}\right)^2+\frac{4}{15}+\frac{1}{45}\sqrt{30} \qquad \textbf{(1.1.8)}$$

$$\frac{4}{5}-\frac{2}{27}\sqrt{30} \qquad \textbf{(1.1.9)}$$

$$\mathrm{Max}\left(1+\frac{1}{6}\sqrt{30}, \frac{4}{5}+\frac{2}{27}\sqrt{30}\right), \ \min\left(1-\frac{1}{6}\sqrt{30}, \frac{4}{5}-\frac{2}{27}\sqrt{30}\right)$$

Calcoliamo la derivata seconda

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)=-\frac{8}{5}x+\frac{8}{5} \qquad \textbf{(1.1.10)}$$

$$y''=-\frac{8}{5}x+\frac{8}{5}$$

$$y''\geq 0$$

$$solve\left(\left\{-\frac{8}{5}x+\frac{8}{5}\ \geq 0\right\}, x\right)$$

$$\{x\leq 1\} \qquad \textbf{(1.1.11)}$$

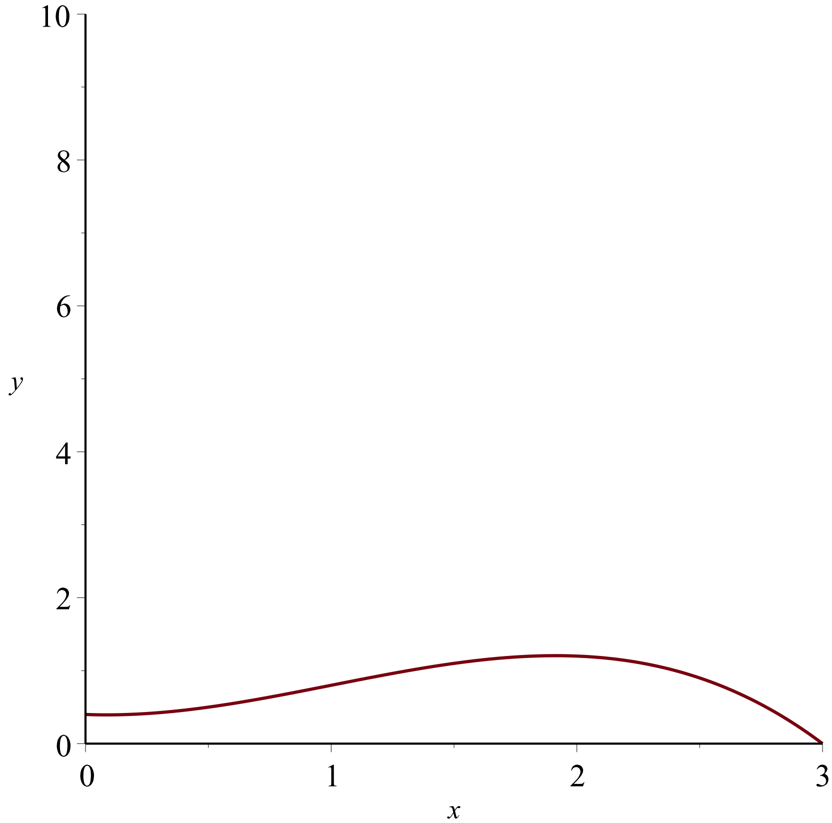
$y''>0 \quad 0\leq x\leq 1 \quad \cup$
$y''<0 \quad per \ 1<x<3 \quad \cap$

$y''>0 \quad se \quad 0\leq x\leq 1$ y convessa

$y''<0 \quad 1<x<3$ $\quad y \quad concava$ $\qquad flesso\left(1, \frac{4}{5}\right)$ come indicato

nelle ipotesi
rappresentiamo la curva

$$plot\left(-\frac{4}{15}\cdot x^3+\frac{4}{5}\cdot x^2-\frac{2}{15}\cdot x+\frac{2}{5}, x=0..3, y=0..10\right)$$



Poichè l'ordinata del punto di massimo è approssimativamente data da

$y_M = evalf\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{27}\sqrt{30}, 3\right)$

$$y_M = 1.21 \qquad \textbf{(1.1.12)}$$

il contenitore può essere utilizzato per scarpe aventi una altezza massima di poco superiore a 12 cm e **quindi non può contenere scarpe alte 14 cm**

Punto 4

Per mostrare che il rapporto ricavo costi **non cresce indefinitamente**, indichiamo con n il numero di pantofole prodotte in un mese,
e definiamo tale rapporto:

$$\frac{15 \cdot n}{500 + 5 \cdot n}$$

Calcoliamo il $\lim_{n \to \infty} \frac{15\,n}{500 + 5\,n}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{15\,n}{500 + 5\,n} = 3$$

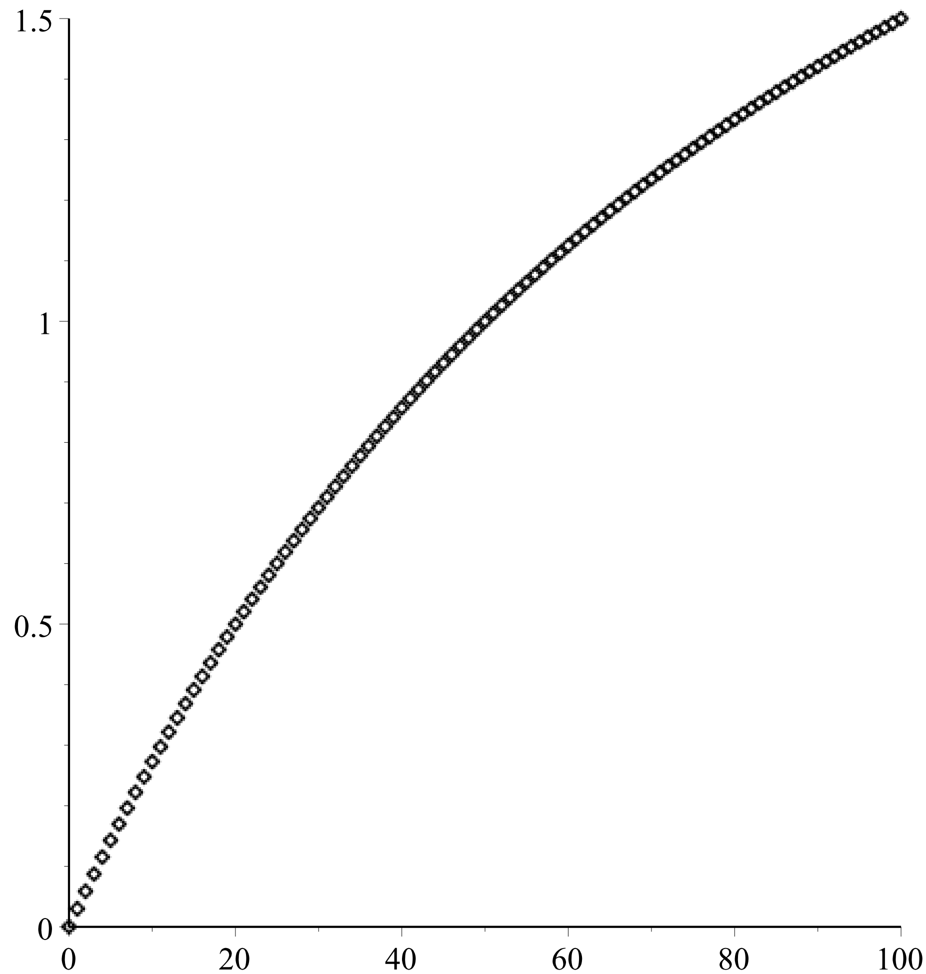
Otteniamo quindi che il ricavo, contrariamente a quanto pensava l'artigiano, al crescere di n si stabilizza e ***tende*** a diventare tre volte il costo

Vediamo come il processo si può rappresentare graficamente.

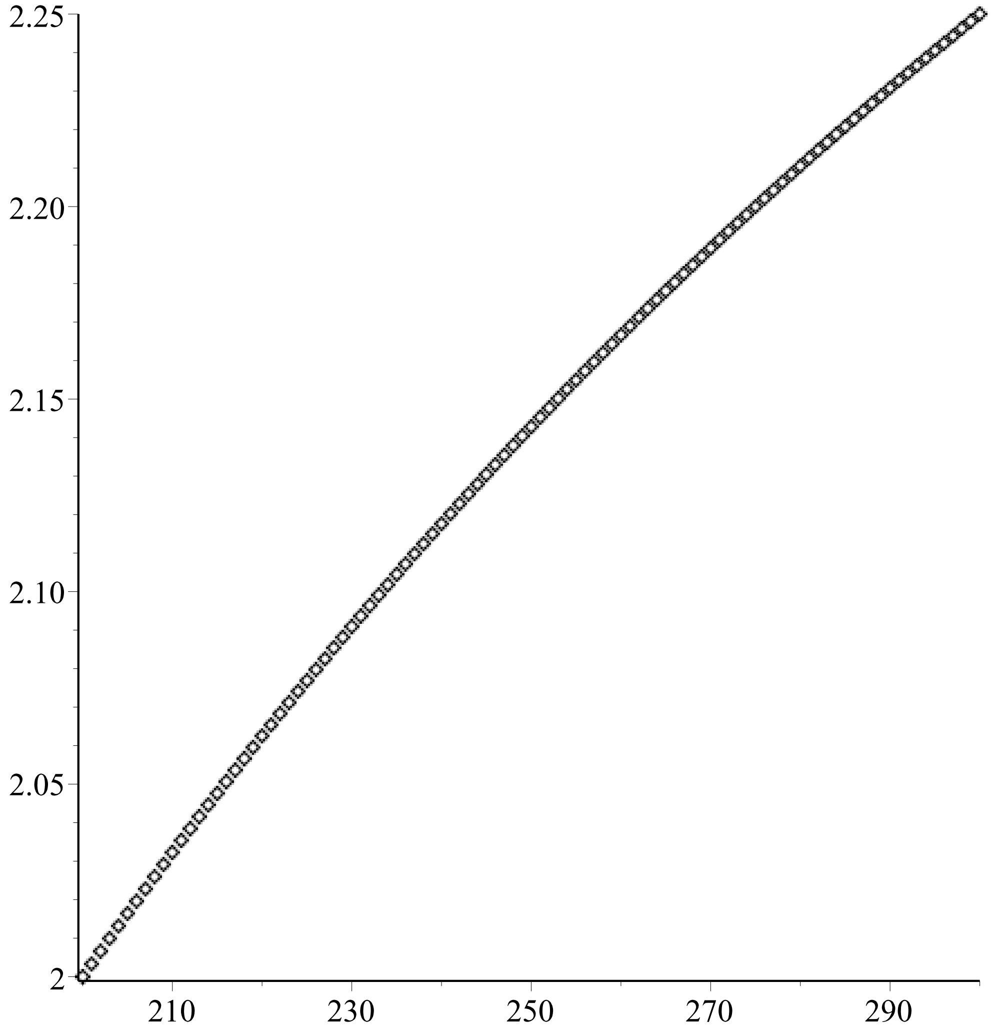
La funzione che rappresenta il rapporto ricavo/costo al crescere del numero di contenitori prodotti in un mese **è la successione**

$$a_n = \frac{15 \cdot n}{500 + 5 \cdot n}$$

Il suo grafico potrebbe essere **rappresentato per quantità discrete 0<n<100** come segue :



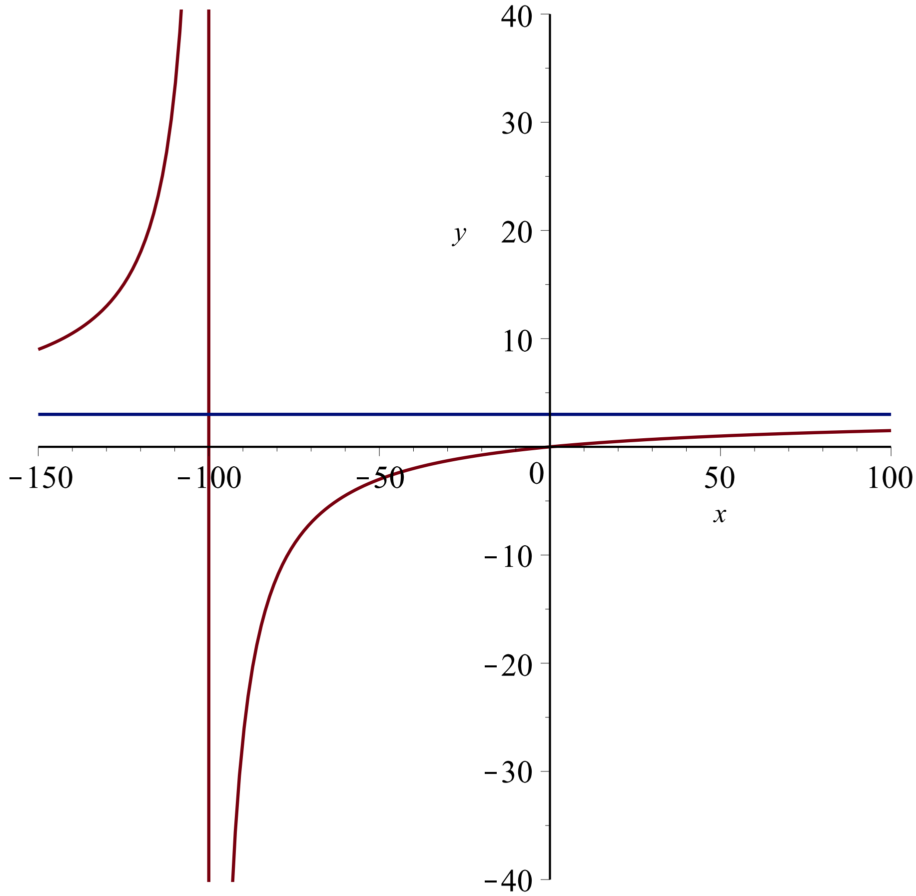
Analizzando il grafico si può dedurre che al crescere del numero dei contenitori prodotti il rapporto aumenta come pensa l'artigiano;
si può mostrare all'artigiano che affinchè il ricavo eguagli la spesa devono essere prodotti e **venduti almeno 50 contenitori**; solo raggiungendo i 200 contenitori (grafico per $200<n<300$) il ricavo è doppio della spesa, superati i 200 contenitori il ricavo cresce.



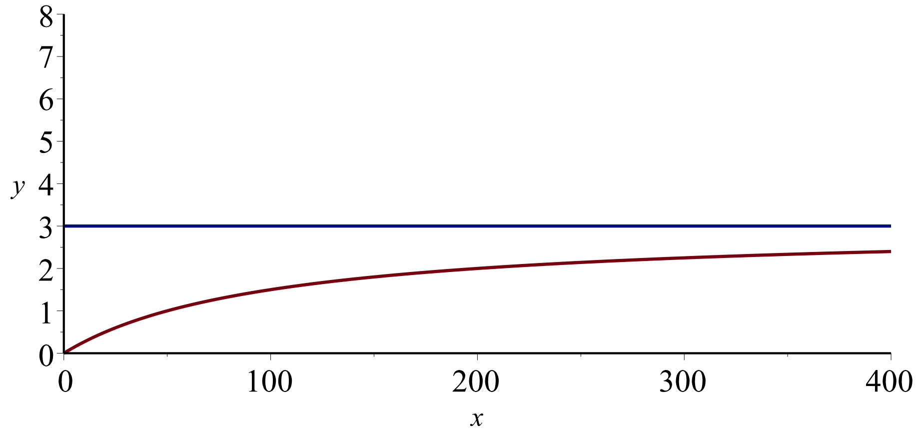
Per mostrare <u>graficamente</u> all'artigiano come il ricavo non cresce indefinitamente occorre mostrare nel grafico la stabilizzazione $(n \rightarrow \infty)$ e quindi dobbiamo associare al rapporto ricavo/costo la **funzione continua** che si ottiene sostituendo ad n (variabile discreta) la variabile continua x $\in \mathbb{R}$ e si ha :

$$y = \frac{15 \cdot \mathrm{x}}{500 + 5 \cdot \mathrm{x}}$$

Essa è una funzione omografica avente come asintoti le rette $x = -100$ (*asintoto verticale*) e $\boldsymbol{y = 3}$ (***asintoto orizzontale***)



Poichè però il numero di contenitori non può essere negativo, l'andamento della funzione che modellizza il rapporto ricavo/costo è costituito dalla parte di grafico che si ottiene per $x \geq 0$.
Tale grafico è :



Dal grafico si mostra all'artigiano che al crescere del numero dei contenitori prodotti il rapporto tende a stabilizzarsi e quindi non a crescere indefinitamente, in modo che il ricavo ***<u>tende</u>*** a diventare **il triplo della spesa**, puoi anche aggiungere all'artigiano, che sicuramente ti chiederà con quanti contenitori prodotti il ricavo è 3 volte il costo, che **il numero di contenitori che permette il 90% di 3 è 900, ma non è possibile che il rapporto ricavo/costo sia uguale a 3**, è molto complesso spiegare a chi non ha la competenza in matematica cos'è un asintoto orizzontale!