ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2002
Sessione ordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva k di equazione $y = f(x)$, dove è:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2}.$$

a) Determinare per quali valori di x essa è situata nel semipiano $y > 0$ e per quali nel semipiano $y < 0$.

b) Trovare l'equazione della parabola passante per l'origine O degli assi e avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y, sapendo che essa incide ortogonalmente la curva k nel punto di ascissa -1 (*N.B.: si dice che una curva incide ortogonalmente un'altra in un punto se le rette tangenti alle due curve in quel punto sono perpendicolari*).

c) Stabilire se la retta tangente alla curva k nel punto di ascissa -1 ha in comune con k altri punti oltre a quello di tangenza.

d) Determinare in quanti punti la curva k ha per tangente una retta parallela all'asse x.

e) Enunciare il teorema di Lagrange e dire se sono soddisfatte le condizioni perché esso si possa applicare alla funzione $f(x)$ assegnata, relativamente all'intervallo $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$.

PROBLEMA 2

Si considerino le lunghezze seguenti:

[1] $a + 2x,\ a - x,\ 2a - x,$

dove a è una lunghezza nota non nulla ed x è una lunghezza incognita.

a) Determinare per quali valori di x le lunghezze [1] si possono considerare quelle dei lati di un triangolo non degenere.

b) Stabilire se, fra i triangoli non degeneri i cui lati hanno le lunghezze [1], ne esiste uno di area massima o minima.

c) Verificato che per $x = \frac{a}{4}$ le [1] rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo, descriverne la costruzione geometrica con riga e compasso e stabilire se si tratta di un triangolo rettangolo, acutangolo o ottusangolo.

d) Indicato con ABC il triangolo di cui al precedente punto c, in modo che BC sia il lato maggiore, si conduca per A la retta perpendicolare al piano del triangolo e si prenda su di essa un punto D tale che AD sia lungo a: calcolare un valore approssimato a meno di un grado (sessagesimale) dell'ampiezza dell'angolo formato dai due piani DBC e ABC.

QUESTIONARIO

1 Il rapporto fra la base maggiore e la base minore di un trapezio isoscele è 4. Stabilire, fornendone ampia spiegazione, se si può determinare il valore del rapporto tra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo dapprima intorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore o se i dati a disposizione sono insufficienti.

2 Due tetraedri regolari hanno rispettivamente aree totali A' e A'' e volumi V' e V''. Si sa che $\frac{A'}{A''} = 2$. Calcolare il valore del rapporto $\frac{V'}{V''}$.

3 Considerati i numeri reali a, b, c, d – comunque scelti – se $a > b$ e $c > d$ allora:

A $a + d > b + c$;

B $a - d > b - c$;

C $ad > bc$;

D $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e motivare esaurientemente la risposta.

4 Si consideri la seguente proposizione: "La media aritmetica di due numeri reali positivi, comunque scelti, è maggiore della loro media geometrica". Dire se è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta.

5 Determinare, se esistono, i numeri a, b in modo che la seguente relazione:

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{a}{x - 3} + \frac{b}{x + 1}$$

sia un'identità.

6 Si consideri la funzione:

$$f(x) = (2x - 1)^7(4 - 2x)^5.$$

Stabilire se ammette massimo o minimo assoluti nell'intervallo $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$.

7 Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione $f(x)$ tale che:

$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t dt, \text{ con } x > 0.$$

8 La funzione reale di variabile reale è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[1; 3]$ e derivabile nell'intervallo aperto $]1, 3[$. Si sa che $f(1) = 1$ e inoltre $0 \leq f'(x) \leq 2$ per ogni x dell'intervallo $]1; 3[$. Spiegare in maniera esauriente perché risulta $1 \leq f(3) \leq 5$.

9 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}.$$

Tale luogo è costituito da:

A un punto;

B due punti;

C infiniti punti;

D nessun punto.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

10 La funzione reale di variabile reale $f(x)$, continua per ogni x, è tale che:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = a, \quad \int_0^6 f(x)\,dx = b,$$

dove a, b sono numeri reali.
Determinare, se esistono, i valori a, b per cui risulta:

$$\int_0^3 f(2x)\,dx = \ln 2 \quad \text{e} \quad \int_1^3 f(2x)\,dx = \ln 4.$$

Durata massima della prova: 6 ore
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

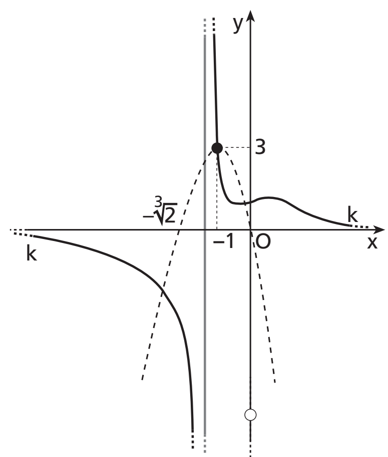
SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2002
Sessione ordinaria

PROBLEMA 1

a) Si discute la positività della funzione: si ha $\frac{x^2+2}{x^3+2} > 0$ per $x > -\sqrt[3]{2}$, $\frac{x^2+2}{x^3+2} < 0$ per $x < -\sqrt[3]{2}$. Pertanto il grafico è situato nel semipiano $y > 0$ per $x > -\sqrt[3]{2}$ e nel semipiano $y < 0$ per $x < -\sqrt[3]{2}$.

b) Il punto della curva k di ascissa -1 ha ordinata $f(-1) = 3$ e quindi coordinate $(-1; 3)$.
La parabola richiesta ha equazione $y = ax^2 + bx$. Il passaggio per $(-1; 3)$ implica che $a - b = 3$ e quindi l'equazione diventa $y = ax^2 + (a-3)x$. Il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola è dato da $y' = 2ax + a - 3$ e nel punto di ascissa -1 vale $m = -a - 3$.
Il coefficiente angolare m' della retta tangente alla curva k nel punto $x = -1$ è uguale a $f'(-1)$. Poiché $f'(x) = \frac{-x(x^3+6x-4)}{(x^3+2)^2}$, $m' = f'(-1) = -11$. Imponendo la condizione di perpendicolarità tra le due tangenti, $m \cdot m' = -1$, si trova $-11(-a-3) = -1 \rightarrow a = -\frac{34}{11}$.
L'equazione della parabola cercata è: $y = -\frac{34}{11}x^2 - \frac{67}{11}x$.

c) Per le considerazioni al punto b, la retta passante per $(-1; 3)$ e tangente alla curva k ha equazione:
$y - 3 = -11(x+1) \rightarrow y = -11x - 8$. Le intersezioni tra tale retta e la curva si trovano risolvendo il sistema:
$\begin{cases} y = -11x - 8 \\ y = \frac{x^2+2}{x^3+2} \end{cases}$. L'equazione risolvente è
$11x^4 + 8x^3 + x^2 + 22x + 18 = 0$. Poiché $x = -1$ è un punto di tangenza, il polinomio sarà divisibile due volte per il binomio $(x+1)$. Applicando la regola di Ruffini, esso si scompone nel modo seguente: $(x+1)^2(11x^2 - 14x + 18)$.



▲ **Figura 1.**

Il discriminante di $11x^2 - 14x + 18$ vale: $\frac{\Delta}{4} = 49 - 198 < 0$; pertanto non esistono soluzioni reali del polinomio diverse da $x = -1$.
Se ne conclude che la retta tangente interseca la curva k solo nel punto $(-1; 3)$.

d) Si tratta di determinare i punti stazionari della funzione f, dove, cioè, la derivata prima si annulla. Nel punto b) si era calcolato $f'(x) = \frac{-x(x^3+6x-4)}{(x^3+2)^2}$. Pertanto si hanno punti stazionari per $x = 0$ e nelle eventuali soluzioni dell'equazione $x^3 + 6x - 4 = 0$. Poiché quest'ultima non è risolvibile per via elementare, si consideri la funzione $g(x) = x^3 + 6x - 4$. Essa è continua e assume in R sia valori positivi che negativi. Per il teorema dell'esistenza degli zeri, ammette almeno uno zero e, essendo la derivata prima $g'(x) = x^2 + 6$ di segno costante, per non andare contro il teorema di Rolle, esisterà un solo zero.
In conclusione, i punti in cui la curva k ha tangente parallela all'asse x sono due, $x = 0$ e l'unica radice dell'equazione $x^3 + 6x - 4 = 0$.

e) Il teorema di Lagrange afferma che se una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso $[a; b]$ ed è derivabile in ogni punto interno a esso, allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo tale che: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.
Essendo la funzione $f(x) = \frac{x^2+2}{x^3+2}$ non definita nel punto $x = -\sqrt[3]{2}$ e $-\sqrt{2} < -\sqrt[3]{2} < 0$, essa non è quindi continua nell'intervallo $[-\sqrt{2}; 0]$. Di conseguenza il teorema di Lagrange non è applicabile.

PROBLEMA 2

a) Tenendo conto che x e a, in quanto lunghezze, sono non negative, le condizioni che devono essere soddisfatte sono la positività delle lunghezze dei lati e le disuguaglianze triangolari:

$$\begin{cases} a+2x>0 \\ a-x>0 \\ 2a-x>0 \\ a+2x<a-x+2a-x \\ a-x<a+2x+2a-x \\ 2a-x<a+2x+a-x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+2x>0 \text{ sempre verificato} \\ x<a \\ x<2a \\ x<\dfrac{a}{2} \\ 2x+2a>0 \text{ sempre verificato} \\ 2x>0 \text{ sempre verificato} \end{cases} \rightarrow x<\frac{a}{2}.$$

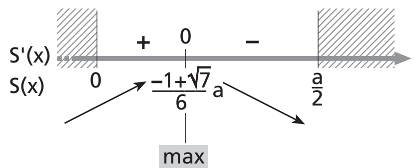
Per avere un triangolo non degenere deve essere $0<x<\dfrac{a}{2}$.

b) Per calcolare l'area del triangolo, noti i lati, si usa la formula di Erone:

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, ove p è il semiperimetro.

$p=2a \rightarrow S(x)=\sqrt{2a(a-2x)(a+x)x}=\sqrt{2a}\sqrt{-2x^3-ax^2+a^2x}$.

La funzione S è continua nell'intervallo $\left]0;\dfrac{a}{2}\right[$; la sua derivata prima è $S'(x)=\sqrt{2a}\,\dfrac{-6x^2-2ax+a^2}{2\sqrt{-2x^3-ax^2+a^2x}}$. Studiando il suo segno si ricava che $S'(x)>0$ quando $-6x^2-2ax+a^2>0$, che ha soluzione $0<x<a\dfrac{-1+\sqrt{7}}{6}$. Lo schema che si ottiene è il seguente (figura 2).



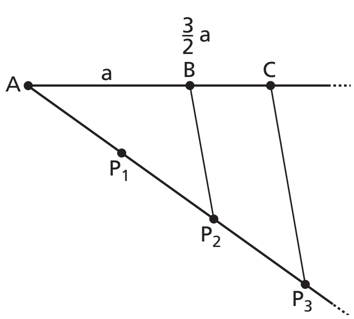
▲ **Figura 2.**

Pertanto il triangolo non degenere ha area massima per $x=a\dfrac{-1+\sqrt{7}}{6}$. Si osservi che per $x=0$ e $x=\dfrac{a}{2}$ la superficie assumerebbe il valore minimo zero ma questi casi corrispondono a triangoli degeneri.

c) Nel punto a) si è trovato che le lunghezze sono lati di un triangolo non degenere quando $0<x<\dfrac{a}{2}$, allora ciò è vero per $x=\dfrac{a}{4}$. In tal caso i lati hanno lunghezze $\dfrac{3}{2}a$, $\dfrac{3}{4}a$ e $\dfrac{7}{4}a$, tutti e tre multipli di a secondo numeri razionali. Dato un segmento che assumiamo di lunghezza a, si costruisce il segmento di lunghezza $\dfrac{m}{n}a$, per esempio, $\dfrac{3}{2}a$, nel seguente modo (figura 3).

Tracciato il segmento AB che misura a, si disegna da A una semiretta non contenente B. Su essa si sceglie un generico punto P_1 e col compasso si riporta per tre volte (il massimo tra m e ed n nel caso generale) il segmento AP_1. Congiunto B con P_2, si manda da P_3 la parallela a BP_2. Il segmento AC per il teorema di Talete ha lunghezza $\dfrac{3}{2}a$.

Allo stesso modo si ottengono i segmenti di lunghezza $\dfrac{3}{4}a$ e $\dfrac{7}{4}a$. La costruzione del triangolo ABC avviene nel piano con

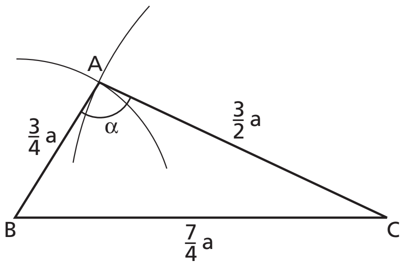


▲ **Figura 3.**

l'uso del compasso. Partendo, per esempio, dal segmento più lungo BC (figura 4), si riporta puntando il compasso prima in un estremo poi nell'altro rispettivamente i restanti segmenti trovati. L'intersezione dei due archi individua il punto A.
Si valuta il tipo di triangolo applicando il teorema trigonometrico di Carnot:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos\alpha.$$

Ricavando $\cos\alpha$ e sostituendo le lunghezze dei lati, si trova $\cos\alpha = -\dfrac{1}{9}$. Pertanto il triangolo è ottusangolo.



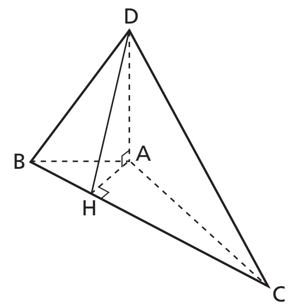
▲ **Figura 4.**

d) Compiuta la costruzione, si tracci da A la perpendicolare a BC e si consideri il triangolo rettangolo HAD (figura 5). L'angolo da valutare è $D\hat{H}A$.

Dai teoremi sui triangoli rettangoli si può scrivere:

$\operatorname{tg} D\hat{H}A = \dfrac{\overline{DA}}{\overline{HA}}$. $\overline{DA} = a$ per ipotesi, HA è l'altezza del triangolo ABC rispetto alla base BC. Pertanto se S è l'area del triangolo ABC, $\overline{HA} = \dfrac{2S}{\overline{BC}}$. Dal punto b) del problema si ricava:

$$S(x) = S\left(\frac{a}{4}\right) = \sqrt{2a\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{5a}{4}\cdot\frac{a}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{4}a^2.$$



▲ **Figura 5.**

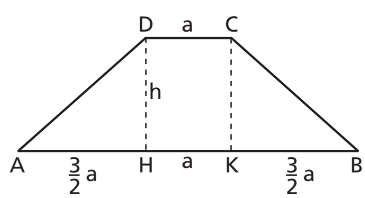
Quindi: $\overline{HA} = \dfrac{\dfrac{2\sqrt{5}}{4}a^2}{\dfrac{7}{4}a} = \dfrac{2\sqrt{5}}{7}a$ e $\operatorname{tg} D\hat{H}A = \dfrac{7}{10}\sqrt{5}$, da cui $D\hat{H}A = \operatorname{arctg}\dfrac{7}{10}\sqrt{5}$. Utilizzando la calcolatrice scientifica si trova: $D\hat{H}A \simeq 57{,}4°$.

QUESTIONARIO

1 Si costruisca un trapezio isoscele $ABCD$ di base minore CD di lunghezza a e altezza h (figura 6).

Per ipotesi risulta $\overline{AB} = 4a$ e $\overline{AH} = \overline{KB} = \dfrac{3}{2}a$. Compiendo una rotazione attorno alla base maggiore, il solido ottenuto è dato da un cilindro e due coni congruenti. Esso ha quindi volume V_1:

$$V_1 = \pi h^2\cdot a + 2\cdot\frac{1}{3}\pi h^2\cdot\frac{3}{2}a = 2\pi a h^2.$$



▲ **Figura 6.**

Eseguendo una rotazione intorno alla base minore, si ottiene un cilindro con due cavità coniche uguali. Il volume V_2 è:

$$V_2 = \pi h^2\cdot 4a - 2\cdot\frac{1}{3}\pi h^2\cdot\frac{3}{2}a = 3\pi a h^2.$$

Si trova così che il rapporto $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2\pi a h^2}{3\pi a h^2} = \dfrac{2}{3}$ è indipendente dai valori di a e di h e quindi i dati del problema sono sufficienti.

2 Due tetraedri regolari sono figure simili, pertanto se il rapporto di lunghezze corrispondenti (rapporto di similitudine) è a, allora il rapporto delle aree vale a^2 e il rapporto dei volumi a^3. Per ipotesi $\frac{A'}{A''}=2$, quindi il rapporto di similitudine risulta uguale a $\sqrt{2}$. Ne consegue: $\frac{V'}{V''}=(\sqrt{2})^3=2\sqrt{2}$.

3 Date le disuguaglianze $a>b$ e $c>d$, per la proprietà dell'addizione di disuguaglianze dello stesso senso vale $a+c>b+d \rightarrow a-d>b-c$. La risposta esatta è B.

4 Siano a e b due numeri reali positivi. La loro media aritmetica è $\frac{a+b}{2}$, mentre quella geometrica vale $\sqrt{ab}$. Bisogna valutare se la disuguaglianza $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ è vera o falsa. Poiché a e b sono positivi, i due membri della disuguaglianza sono anch'essi positivi e si possono elevare entrambi al quadrato: $\frac{(a+b)^2}{4}>ab \rightarrow (a-b)^2>0$. Quest'ultima relazione è sempre verificata per $a \neq b$. Pertanto, non essendoci nessuna ipotesi a questo riguardo, la proprietà del testo è vera soltanto per $a \neq b$.

5 Consideriamo membro a membro la possibile identità.

Primo membro: $\frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{1}{(x-3)(x+1)}$.

Secondo membro: $\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+1}=\frac{x(a+b)+a-3b}{(x-3)(x+1)}$

Per l'identità dei polinomi, i due membri sono uguali se vale il sistema:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-3b=1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=-\frac{1}{4} \end{cases}.$$

6 La funzione f, essendo riconducibile a un polinomio, è continua nel campo reale e in particolare nell'intervallo chiuso $\left[\frac{1}{2};\, 2\right]$. Vale allora il teorema di Weierstrass, per il quale la funzione ammette il massimo e il minimo assoluto.

7 Si consideri un valore $x_0>0$ tale che $x<x_0<x+1$. Per la proprietà dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione si può scrivere:

$$f(x)=\int_x^{x+1}\ln t\,dt=\int_x^{x_0}\ln t\,dt+\int_{x_0}^{x+1}\ln t\,dt=-\int_{x_0}^{x}\ln t\,dt+\int_{x_0}^{x+1}\ln t\,dt.$$

Per definizione della funzione integrale $F(x)=\int_{x_0}^{x}\ln t\,dt$, risulta:

$$f(x)=F(x+1)-F(x).$$

Derivando membro a membro e alla luce del teorema fondamentale del calcolo integrale si trova:

$$f'(x)=F'(x+1)-F'(x)=\ln(x+1)-\ln x=\ln\frac{x+1}{x}.$$

8 Poiché sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange, esiste un punto $c \in]1;\, 3[$ tale che:

$$f'(c)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{f(3)-1}{2}.$$

Essendo $0 \le f'(x) \le 2$, risulta $0 \le \frac{f(3)-1}{2} \le 2$, e quindi $1 \le f(3) \le 5$.

9 La condizione di realtà delle radici richiede che il campo di esistenza della funzione soddisfi il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \ge 0 \\ 1 - x^2 \ge 0 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} x \le -1 \vee x \ge 1 \\ -1 \le x \le 1 \end{cases} \to \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Il campo di esistenza contiene solo -1 e 1 e pertanto il luogo è formato da due punti: la risposta esatta è quindi B.

10 Considerati gli integrali $\int_0^3 f(2x)\,dx = \ln 2$ e $\int_1^3 f(2x)\,dx = \ln 4$, si compia il cambiamento di variabile $2x = t$:

Se $x = \frac{t}{2}$, $dx = \frac{1}{2}dt$ quindi

$$\int_0^3 f(2x)\,dx = \ln 2 \to \frac{1}{2}\int_0^6 f(t)\,dt = \ln 2 \to \int_0^6 f(t)\,dt = \ln 4;$$

$$\int_1^3 f(2x)\,dx = \ln 4 \to \frac{1}{2}\int_2^6 f(t)\,dt = \ln 4 \to \int_2^6 f(t)\,dt = \ln 16;$$

Sottraendo membro a membro le due uguaglianze, si ottiene: $\int_0^2 f(t)\,dt = -\ln 4$.

Ora, poiché $\int_0^2 f(x)\,dx = a$ e $\int_0^6 f(x)\,dx = b$, si conclude per confronto che $a = -\ln 4$ e $b = \ln 4$.

Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel	Svolgi il
Problema 1	• Esercizio 76 pag. V 245 • Problema 2 pag. W 168 (punti a, b) • Quesito 5 pag. W 171 • Quesito 6 pag. W 169
Problema 2	• Esercizio 238 pag. V 198 • Problema 14 pag. π 97 (punto b)
Quesito 1	• Quesito 6 pag. π 96
Quesito 2	• Quesito 10 pag. π 96
Quesito 4	• Quesito 8 pag. W 173
Quesito 5	• Problema 26 pag. W 72
Quesito 6	• Quesito 11 pag. U 208 • Quesito 2 pag. U 247
Quesito 7	• Quesito 3 pag. W 136 • Quesito 8 pag. W 136
Quesito 8	• Quesito 5 pag. V 288 • Quesito 6 pag. W 169
Quesito 9	• Esercizio 32 pag. U 23 (seconda parte) • Esercizio 114 pag. U 29 (seconda parte)
Quesito 10	• Quesito 6 pag. W 136