ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2003
Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Del triangolo ABC si hanno le seguenti informazioni:

$AB = 3$ cm; $AC = 2$ cm; $C\hat{A}B = 60°$.

Si tracci la bisettrice di $C\hat{A}B$ e se ne indichi con D l'intersezione con il lato BC.

a) Si calcoli la lunghezza del lato BC e delle parti in cui esso risulta diviso dal punto D.
b) Si determinino il coseno dell'angolo in B, la misura di AD e, disponendo di un calcolatore, le misure approssimate degli altri due angoli interni di vertici B e C.
c) Si trovi sul lato AD, internamente a esso, un punto P tale che la somma s dei quadrati delle sue distanze dai vertici A, B e C sia m^2 essendo m un parametro reale dato.
d) Si discuta tale ultima questione rispetto al parametro m.

PROBLEMA 2

È data una piramide retta a base quadrata.

a) Si sezioni la piramide con un piano parallelo alla base e si indichino con a, b $(a > b)$ e h rispettivamente le misure degli spigoli delle basi e l'altezza del tronco che ne risulta. Si esprima in funzione di a, b, h il volume del tronco di piramide illustrando il ragionamento seguito.
b) Si calcoli il volume massimo della piramide data sapendo che la sua superficie laterale è $\sqrt{3}$ dm^2.
c) Si calcoli il raggio della sfera circoscritta alla piramide massima trovata.
d) Si dia una approssimazione della capacità in litri di tale sfera.

QUESTIONARIO

1 Tra i rettangoli aventi la stessa area di 16 m^2 trovare quello di perimetro minimo.

2 Cosa si intende per «funzione periodica»? Qual è il periodo della funzione $f(x) = \operatorname{sen} x - 2\cos x$?

3 Dare un esempio di un solido la cui superficie laterale è 24π.

4 Provare che se l'equazione $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ha due soluzioni entrambe di valore k, allora k è anche soluzione dell'equazione $y' = 0$ avendo posto $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. A quale condizione k è anche soluzione di $y'' = 0$?

5 Dare una giustificazione delle formule:

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
$\cos 2\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha$

e utilizzarle per provare che:

$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1.$

6 Dimostrare che l'equazione $x^5 + 10x + 1 = 0$ ammette una sola soluzione reale.

7 Enunciare il teorema del valor medio o di Lagrange [da Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813)] e mostrarne le implicazioni ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle curve.

8 Di una funzione $f(x)$ si sa che la sua derivata seconda è 2^x e si sa ancora che:

$f(0) = \left(\frac{1}{\ln 2}\right)^2$ e $f'(0) = 0$.

Qual è $f(x)$?

9 Calcolare l'area della parte finita di piano delimitata dalla curva d'equazione $y = 2e^x - 1$ e dagli assi cartesiani.

10 Definire gli asintoti – orizzontale, obliquo, verticale – di una curva e fornire un esempio di funzione $f(x)$ il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

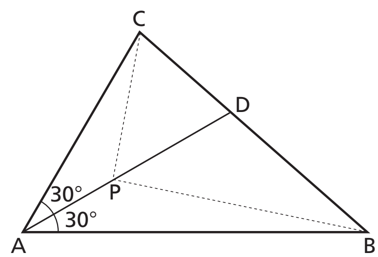
a) La lunghezza del lato BC del triangolo ABC disegnato in figura 1 si calcola mediante il teorema di Carnot:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cos(C\hat{A}B).$$

Sostituendo i dati $\overline{AB} = 3$ cm, $\overline{AC} = 2$ cm, $\cos(C\hat{A}B) = \cos(60°) = \dfrac{1}{2}$ e omettendo da qui in poi per semplicità l'unità di misura cm, si ottiene:

$$\overline{BC} = \sqrt{9 + 4 - 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{7}.$$

Figura 1.



Per il teorema della bisettrice di un angolo interno di un triangolo, la bisettrice dell'angolo $C\hat{A}B$ divide il lato BC in parti direttamente proporzionali agli altri due lati, quindi:

$$\overline{CD} : \overline{DB} = \overline{AC} : \overline{AB} \rightarrow \overline{CD} : \overline{DB} = 2 : 3 \rightarrow$$

$$(\overline{CD} + \overline{DB}) : \overline{CD} = (2 + 3) : 2.$$

Nell'ultimo passaggio è stata utilizzata la proprietà del comporre delle proporzioni.

Essendo: $\overline{CD} + \overline{DB} = \overline{BC} = \sqrt{7}$,
si ha:

$$\sqrt{7} : \overline{CD} = 5 : 2 \rightarrow \overline{CD} = \frac{2}{5}\sqrt{7} \text{ e } \overline{DB} = \frac{3}{2}\overline{CD} = \frac{3}{5}\sqrt{7}.$$

b) Per calcolare $\cos(A\hat{B}C)$ si applica nuovamente il teorema di Carnot al triangolo ABC:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cos(A\hat{B}C).$$

Quindi:

$$\cos(A\hat{B}C) = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2\overline{AB} \cdot \overline{BC}} = \frac{9 + 7 - 4}{6\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

Anche la misura del lato AD si trova con un'ulteriore applicazione del teorema di Carnot, questa volta al triangolo ABD:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BD} \cos(A\hat{B}D),$$ ed essendo $A\hat{B}D = A\hat{B}C$, si ottiene:

$$\overline{AD} = \sqrt{9 + \frac{9}{25} \cdot 7 - 6 \cdot \frac{3}{5}\sqrt{7} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}}} = \sqrt{9 + \frac{63}{25} - \frac{36}{5}} = \frac{6}{5}\sqrt{3}.$$

La misura approssimata in gradi dell'angolo $A\hat{B}C = \arccos\left(\dfrac{2}{\sqrt{7}}\right)$ si ottiene utilizzando la funzione $\cos^{-1}$ della calcolatrice impostata nella modalità `DEG`: $A\hat{B}C \simeq 40{,}89339465$.
La misura approssimata dell'angolo in C si ottiene per differenza:

$A\hat{C}B \simeq 180° - 60° - 40{,}89339465° = 79{,}1066054°.$

Sempre con la calcolatrice si può automaticamente convertire nel sistema sessagesimale (gradi-primi-secondi) le due misure approssimate; si ottiene $A\hat{B}C \simeq 40°53'36''$ e $A\hat{C}B \simeq 79°06'24''$.

c) Si cerca un punto P sul lato AD che verifichi: $\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PB}^2 = m^2$. Si pone $\overline{PA} = x$, quindi $\overline{PA}^2 = x^2$, con $0 \le x \le \frac{6}{5}\sqrt{3}$ e si esprime $\overline{PC}^2$ e $\overline{PB}^2$ in funzione di x utilizzando ancora una volta il teorema di Carnot e ricordando che $C\hat{A}P = P\hat{A}B = 30°$:

$$\overline{PC}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AP}\cdot\overline{AC}\cos(30°) = x^2 + 4 - 2\sqrt{3}x,$$
$$\overline{PB}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AP}\cdot\overline{AB}\cos(30°) = x^2 + 9 - 3\sqrt{3}x.$$

L'equazione $\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PB}^2 = m^2$ diventa: $3x^2 - 5\sqrt{3}x + 13 = m^2$.

d) Si determina per quali valori del parametro m l'equazione di secondo grado $3x^2 - 5\sqrt{3}x + 13 = m^2$ ha una o due soluzioni accettabili, cioè comprese nel suo dominio geometrico $0 \le x \le \frac{6}{5}\sqrt{3}$.

Si stabiliscono prima di tutto le limitazioni, cioè i valori che m deve assumere quando P si trova ai limiti del dominio.

Se $P \equiv A$, $\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PB}^2 = 0 + \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = 9 + 4 = 13 \rightarrow m^2 = 13 \rightarrow m = \pm\sqrt{13}$;

se $P \equiv D$, $\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{DB}^2 = \frac{108}{25} + \frac{63}{25} + \frac{28}{25} = \frac{199}{25}$, quindi:

$$m^2 = \frac{199}{25} \rightarrow m = \pm\frac{\sqrt{199}}{5}.$$

L'equazione $3x^2 - 5\sqrt{3}x + 13 = m^2$ può essere interpretata come l'equazione risolvente del sistema:

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 5\sqrt{3}x + 13, \quad 0 \le x \le \frac{6}{5}\sqrt{3} \\ y = m^2 \end{cases}$$

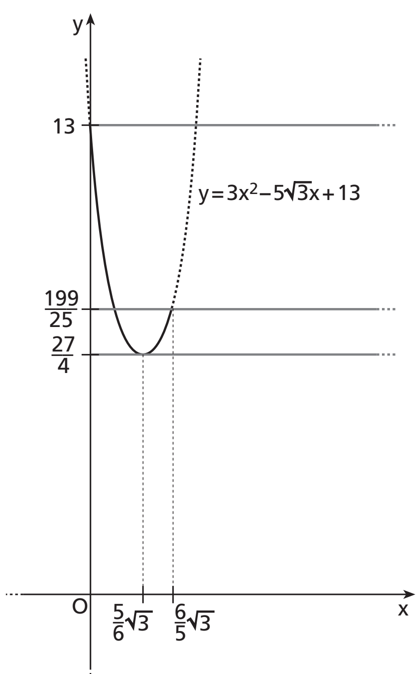
in cui la prima equazione rappresenta un arco di parabola con asse parallelo all'asse y e di vertice $V = \left(\frac{5}{6}\sqrt{3}; \frac{27}{4}\right)$ mentre la seconda equazione rappresenta, al variare di m, un fascio di rette parallele all'asse x (figura 2).

Sostituendo nell'equazione della parabola i valori limite del dominio geometrico, $x = 0$ e $x = \frac{6}{5}\sqrt{3}$, si determinano i punti $(0; 13)$ e $\left(\frac{6}{5}\sqrt{3}; \frac{199}{25}\right)$. In figura 2 sono evidenziati l'arco di parabola individuato dalle limitazioni, la retta tangente e le rette passanti per gli estremi dell'arco di parabola. Osservando il grafico si deduce che la retta $y = m^2$ interseca l'arco di parabola:

in due punti se $\frac{27}{4} \le m^2 \le \frac{199}{25} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2} \le |m| \le \frac{\sqrt{199}}{5}$;

in un punto se $\frac{199}{25} < m^2 \le 13 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{199}}{5} < |m| \le 13$.

▼ **Figura 2.**



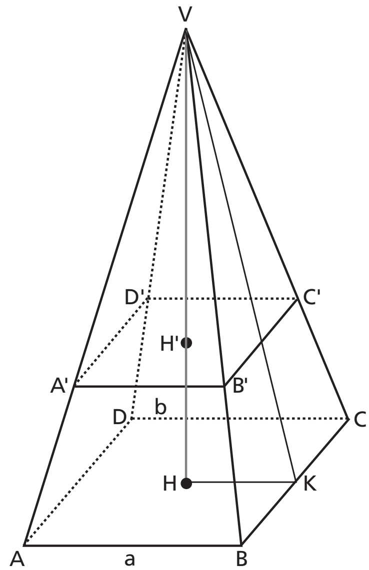
Quindi l'equazione $s(x) = m^2$ ha:

due soluzioni per $\frac{27}{4} \leq m^2 \leq \frac{199}{25}$;

una soluzione per $\frac{199}{25} < m^2 \leq 13$.

PROBLEMA 2

a) Sia la piramide retta quadrata di figura 3, avente vertice V, base quadrata $ABCD$ e altezza VH, la piramide data dal problema.
Per un teorema di geometria euclidea nello spazio è noto che, se si seziona una piramide con un piano parallelo alla base, la sezione e la base sono poligoni simili e i lati di questi poligoni sono proporzionali alle distanze del loro piano dal vertice V. Quindi il poligono $A'B'C'D'$ di figura 3, ottenuto sezionando la piramide retta $ABCDV$ con un piano parallelo alla base, è simile al quadrato $ABCD$ ed è quindi anch'esso un quadrato. Essendo $a > b$ per ipotesi, si indica con a lo spigolo della base $ABCD$ e con b lo spigolo della base $A'B'C'D'$ del tronco di piramide e sia H' il punto in cui l'altezza VH incontra la sezione $A'B'C'D'$. Dal parallelismo delle due basi discende che VH' è altezza della piramide $A'B'C'D'V$ e che l'altezza del tronco di piramide è $h = \overline{HH'}$. Quindi si ha:



▲ **Figura 3.**

$$a : b = \overline{VH} : \overline{VH'} \rightarrow a : b = (\overline{VH'} + h) : \overline{VH'}.$$

Per la proprietà dello scomporre:

$$(a - b) : b = h : \overline{VH'} \rightarrow \overline{VH'} = \frac{bh}{a - b}.$$

Esprimiamo il volume del tronco di piramide come differenza dei volumi delle due piramidi $ABCDV$ e $A'B'C'D'V$:

$$V_{(\text{tronco})} = V_{(ABCDV)} - V_{(A'B'C'D'V)} = \frac{1}{3}\overline{VH} \cdot A_{(ABCD)} - \frac{1}{3}\overline{VH'} \cdot A_{(A'B'C'D')} = \frac{1}{3}\overline{VH} \cdot a^2 - \frac{1}{3}\overline{VH'} \cdot b^2.$$

Sostituendo $\overline{VH} = \overline{VH'} + h$ nella relazione del volume si ottiene:

$$V_{(\text{tronco})} = \frac{1}{3}(\overline{VH'} + h) \cdot a^2 - \frac{1}{3}\overline{VH'} \cdot b^2 = \frac{1}{3}[\overline{VH'} \cdot (a^2 - b^2) + ha^2],$$

e sostituendo $\overline{VH'}$, si trova:

$$V_{(\text{tronco})} = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{bh}{a - b} \cdot (a^2 - b^2) + ha^2\right] = \frac{1}{3}h \cdot [b \cdot (a + b) + a^2] = \frac{1}{3}h \cdot (a^2 + b^2 + ab).$$

b) Ricordiamo che il volume della piramide data è $V_{(ABCDV)} = \frac{1}{3}\overline{VH} \cdot a^2$. Per determinarne il volume massimo esprimiamo $\overline{VH}$ in funzione dello spigolo a. Poiché la piramide data è retta, l'apotema $\overline{VK}$ (figura 3) è mediana del triangolo isoscele VBC e H è centro di simmetria del quadrato $ABCD$, quindi $\overline{HK} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{a}{2}$. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo VHK si ottiene:

$$\overline{VH} = \sqrt{\overline{VK}^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4\overline{VK}^2 - a^2}.$$

Per ipotesi $S_{l(ABCDV)} = p_{(ABCD)} \cdot \overline{VK} = \sqrt{3}$, essendo $S_{l(ABCDV)}$ la superficie laterale della piramide e $p_{(ABCD)}$ il semiperimetro della base $ABCD$. Ricaviamo $\overline{VK}$. Si ha: $\overline{VK} = \frac{\sqrt{3}}{2a} \rightarrow \overline{VK}^2 = \frac{3}{4a^2}$.

Quindi:

$$\overline{VH} = \frac{1}{2}\sqrt{4\overline{VK}^2 - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{a^2} - a^2} = \frac{1}{2a}\sqrt{3 - a^4} \text{ con le condizioni:}$$

$$a > 0 \wedge (3 - a^4) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < a < \sqrt[4]{3}.$$

Sostituendo nella formula del volume otteniamo:

$$V_{(ABCDV)} = f(a) = \frac{1}{6}a \cdot \sqrt{3 - a^4}.$$

Per calcolare il volume massimo studiamo il segno di f':

$$f'(a) = \frac{1}{6}\left(\sqrt{3 - a^4} + \frac{1}{2}a \cdot \frac{-4a^3}{\sqrt{3 - a^4}}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{3 - 3a^4}{\sqrt{3 - a^4}}\right) = \frac{1 - a^4}{2\sqrt{3 - a^4}}.$$

Quindi:

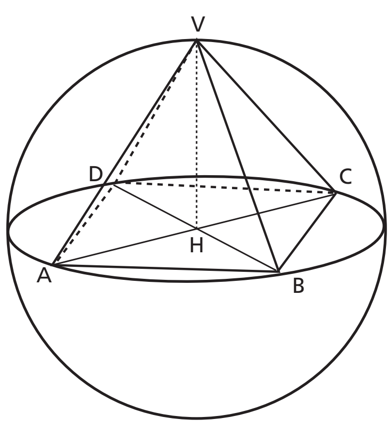
per $a = 1$ $f'(a) = 0$;

per $a > 1$ $f'(a) < 0$ $\rightarrow$ la funzione f è decrescente;

per $a < 1$ $f'(a) > 0$ $\rightarrow$ la funzione f è crescente.

Perciò $a = 1$ è un punto di massimo e la piramide di volume massimo si ottiene per $a = 1$, quindi $V_{(ABCDV)} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ dm³. L'altezza della piramide di volume massimo è $\overline{VH} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dm le diagonali della base quadrata $ABCD$ hanno lunghezza $\sqrt{2}$ dm entre gli spigoli laterali misurano 1 dm, esattamente come gli spigoli di base. Quindi le quattro facce laterali della piramide sono triangoli equilateri e la piramide di volume massimo è regolare oltre che retta.

c) Per calcolare il raggio della sfera circoscritta utilizziamo le particolari misure e simmetrie della piramide di volume massimo individuate nel punto b). Essendo $\overline{VH} = \overline{HA} = \overline{HC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dm, la sfera circoscritta è il solido che si ottiene, ad esempio, dalla rotazione completa del semicerchio contenente i vertici V, A e C della piramide attorno al diametro AC (figura 4). Il raggio della sfera circoscritta è pari a $\overline{VH}$ e quindi è uguale a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dm.



▲ **Figura 4.**

d) Ricordiamo che la capacità di un litro equivale al volume di $1\,\text{dm}^3$. Calcoliamo il volume della sfera:

$$V_{(\text{sfera})} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi\,\text{dm}^3.$$

Quindi la capacità della sfera è $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$ litri $\simeq 1{,}48096$ litri.

QUESTIONARIO

1 Indicati con x e y i lati del generico rettangolo di area $16\,\text{m}^2$, si ha:

$$\begin{cases} xy = 16 \\ 2p = 2x + 2y \end{cases} \quad \text{con } x > 0,\ y > 0.$$

Esprimiamo y in funzione di x utilizzando la prima equazione: $y = \frac{16}{x}$ con $x > 0$. Sostituendo nella seconda otteniamo l'espressione del perimetro $2p$ in funzione della sola variabile x: $f(x) = 2x + \frac{32}{x}$ con $x > 0$. Trovare il rettangolo di perimetro minimo equivale a trovare il minimo, se esiste, della funzione f. Essendo f continua e derivabile nel suo campo di esistenza studiamo il segno di $f'(x) = 2 - \frac{32}{x^2}$:

$$f'(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad 2 - \frac{32}{x^2} = 0 \quad \leftrightarrow \quad 2(x^2 - 16) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = \pm 4.$$

La soluzione $x = -4$ non è accettabile, quindi: $f'(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = 4$. Inoltre si ha:

$$\left.\begin{array}{l} \text{per } x < 4\ f'(x) < 0, \text{ e quindi } f \text{ è decrescente} \\ \text{per } x > 4\ f'(x) > 0, \text{ e quindi } f \text{ è crescente} \end{array}\right. \rightarrow f \text{ ha un minimo in } x = 4.$$

Per $x = 4$ si ha $y = \frac{16}{4} = 4$, quindi tra tutti i rettangoli aventi area assegnata quello con il minimo perimetro è il quadrato.

2 Una funzione $f: A \mapsto \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice periodica se esiste un numero reale $T > 0$ tale che, per qualsiasi k intero, si ha: $x \in A \rightarrow x + kT \in A$ e $f(x) = f(x + kT)$. Si chiama periodo di f il minimo $T > 0$ che verifica le due condizioni.
Per determinare il periodo di $f(x) = \operatorname{sen} x - 2\cos x$, ricordiamo che se due funzioni sono periodiche di periodi T_1 e T_2 le loro funzioni somma o differenza (quando non sono costanti) sono periodiche, con periodo che è il minimo comune multiplo fra T_1 e T_2. $\operatorname{sen} x - 2\cos x$ è la differenza fra due funzioni di periodo 2π, quindi f ha periodo 2π.

3 Si possono fornire diversi esempi di solidi la cui superficie laterale è 24π usando le formule per il calcolo delle superfici laterali. Consideriamo ad esempio la formula $S_l\,(\text{cono}) = \pi \cdot r \cdot a$ per il cono circolare retto e la formula $S_l\,(\text{cilindro}) = 2\pi \cdot r \cdot h$ per il cilindro circolare retto.
Si ha:

$$S_{l\,(\text{cono})} = 24\pi \quad \Leftrightarrow \quad \pi \cdot r \cdot a = 24\pi \quad \Leftrightarrow \quad r \cdot a = 24.$$

$$S_{l\,(\text{cilindro})} = 24\pi \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi \cdot r \cdot h = 24\pi \quad \Leftrightarrow \quad r \cdot h = 12.$$

Quindi un cono circolare retto avente raggio di base 3 e apotema 8 è un esempio di solido avente superficie laterale 24π. Un altro esempio è un cilindro circolare retto avente raggio di base 6 e altezza 2.

4 Se indichiamo con h la terza radice del polinomio di terzo grado $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ si ha:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \rightarrow \quad a(x-k)^2(x-h) = 0.$$

Quindi:

$$f(x) = a(x-k)^2(x-h) \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2a(x-k)(x-h) + a(x-k)^2 \quad \rightarrow \quad f'(x) = a(x-k)(3x-2h-k)$$

e k è anche soluzione dell'equazione $f'(x) = 0$.
Vediamo ora sotto quali condizioni k è anche soluzione di $f''(x) = 0$:

$$f''(x) = a(3x-2h-k) + 3a(x-k) \quad \rightarrow \quad f''(x) = 2a(3x-h-2k),$$

quindi $f''(k) = 2a(k-h)$ e $f''(k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = h$ cioè se e solo se k è soluzione tripla del polinomio di terzo grado dato.

5 Per calcolare $\cos 2\alpha$ utilizziamo le formule di addizione del coseno: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.
Ponendo $\beta = \alpha$ si ottiene la formula di duplicazione del coseno:

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha.$$

Ricaviamo $\operatorname{sen}^2\alpha$ dall'identità fondamentale $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, quindi $\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$; sostituendo nella formula di duplicazione del coseno si trova:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha + \cos^2\alpha - 1 = 2\cos^2\alpha - 1.$$

che è la prima delle due identità da provare.
Ricaviamo $\cos^2\alpha$ dall'identità fondamentale $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, quindi $\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$; sostituendo nella formula di duplicazione del coseno si ottiene:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha.$$

che è la seconda identità da provare.
Se scriviamo $\cos(4\alpha) = \cos(2\cdot(2\alpha))$, possiamo applicare la prima identità dimostrata:

$$\cos(4\alpha) = 2\cos^2(2\alpha) - 1 = 2(2\cos^2\alpha - 1)^2 - 1 = 2(4\cos^4\alpha + 1 - 4\cos^2\alpha) - 1 = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1.$$

Abbiamo così verificato l'ultima identità.

6 Le soluzioni dell'equazione $x^5 + 10x + 1 = 0$ sono gli zeri della funzione continua e derivabile $f(x) = x^5 + 10x + 1$ che ha come campo di esistenza l'insieme dei numeri reali. Essendo $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^5 + 10x + 1 = \pm\infty$, per il teorema degli zeri esiste almeno un punto in cui f si annulla. Per dimostrarne l'unicità osserviamo che:

$$f'(x) = 5x^4 + 10 \rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

pertanto la funzione f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ e non può assumere il valore zero in più di un punto.

7 Il teorema del valor medio o di Lagrange dice che:
se una funzione $y = f(x)$ è continua in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ ed è derivabile in ogni punto interno a esso, esiste almeno un punto c interno all'intervallo per cui vale la relazione:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Le implicazioni del teorema di Lagrange ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle curve sono contenute nel seguente teorema, che definisce una condizione sufficiente affinché una funzione sia crescente o decrescente in un intervallo.
Data una funzione $f(x)$ continua in un intervallo I e derivabile nei punti interni di I:

a) se $f'(x)>0$ in ogni punto interno di I, allora f è crescente in senso stretto in I;
b) se $f'(x)<0$ in ogni punto interno di I, allora f è decrescente in senso stretto in I;
c) se $f'(x)\geq 0$ in ogni punto interno di I, allora f è crescente in I;
d) se $f'(x)\leq 0$ in ogni punto interno di I, allora f è decrescente in I.

Dimostriamo il punto a). Siano x_1 e $x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Per il Teorema di Lagrange, applicato nell'intervallo $[x_1; x_2]$, si ha:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c) \text{ con } c\in]x_1; x_2[.$$

Essendo per ipotesi $f'(c)>0$ e $x_2-x_1>0$, deve essere $f(x_2)>f(x_1)$. Per l'arbitrarietà della scelta di x_1 e x_2, segue che f è crescente in senso stretto in I.
Procedendo in modo analogo si dimostrano gli altri 3 punti.

8 Poiché $f''(x)=2^x$, per il teorema del calcolo integrale risulta: $f'(x)=\int 2^x\,dx=\frac{2^x}{\ln 2}+c$ con c costante arbitraria. Determiniamo c:

$$f'(0)=0 \rightarrow \frac{2^x}{\ln 2}+c=0 \rightarrow c=-\frac{1}{\ln 2} \rightarrow f'(x)=\frac{2^x-1}{\ln 2}.$$

Integrando ancora:

$$f(x)=\int \frac{2^x-1}{\ln 2}\,dx=\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{2^x}{\ln 2}-x\right)+d \text{ con } d \text{ costante arbitraria.}$$

Quindi $f(0)=\left(\frac{1}{\ln 2}\right)^2+d$ ma per ipotesi $f(0)=\left(\frac{1}{\ln 2}\right)^2$, quindi $d=0$ e $f(x)=\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{2^x}{\ln 2}-x\right)$.

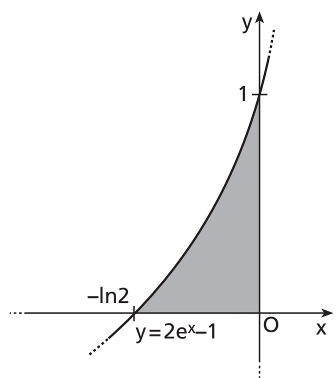
9 Calcoliamo le intersezioni di $y=2e^x-1$ con gli assi cartesiani.

$x=0 \quad \rightarrow \quad y=1 \rightarrow$ la curva interseca l'asse y nel punto $(0;1)$

$y=0 \quad \rightarrow \quad 2e^x=1 \rightarrow x=\ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \rightarrow \quad x=-\ln 2 \quad \rightarrow$ la curva interseca l'asse x nel punto $(-\ln 2; 0)$.

La funzione è inoltre crescente. In figura 5 è riportato il grafico della curva e in grigio la parte finita di piano di cui è richiesto calcolare l'area S.

$$S=\int_{-\ln 2}^{0}(2e^x-1)\,dx=[2e^x-x]_{-\ln 2}^{0}=2-2e^{-\ln 2}-\ln 2=1-\ln 2.$$



▲ **Figura 5.**

10 Data la funzione $y=f(x)$ si dice che:
la retta $y=q$ è asintoto orizzontale per il grafico della funzione se si verifica almeno uno dei seguenti limiti: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=q$ oppure $\lim_{x\to-\infty} f(x)=q$ oppure $\lim_{x\to\infty} f(x)=q$;
la retta $x=c$ è asintoto verticale per il grafico della funzione se almeno uno dei due limiti $\lim_{x\to c^-} f(x)$, $\lim_{x\to c^+} f(x)$ è infinito;
la retta $y=mx+q$ con $m\neq 0$ è asintoto obliquo per il grafico della funzione se si verifica che:
$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(mx+q)]=0$ oppure $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(mx+q)]=0$.

Consideriamo ora la funzione razionale $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$ che ha campo di esistenza $\mathbb{R} - \{-3, +3\}$ e il cui segno è riportato in figura 6.

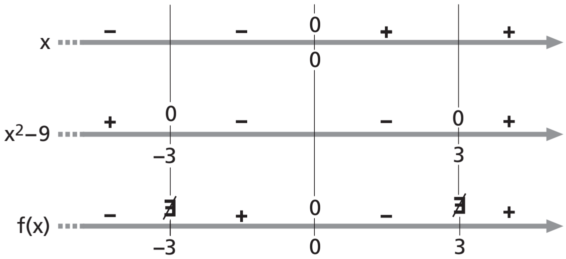


Figura 6.

Utilizzando lo studio del segno tracciamo il grafico della funzione (figura 7) e osserviamo che le rette $x = 3$ e $x = -3$ sono asintoti verticali mentre la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale.
In generale, per costruire funzioni con asintoti, è comodo usare funzioni razionali aventi a numeratore e denominatore polinomi privi di divisori comuni. Infatti se a è una radice del polinomio a denominatore, allora la retta $x = a$ è asintoto verticale per il grafico di f. Se il grado del numeratore è minore o uguale del grado al denominatore allora il grafico di f ha un asintoto orizzontale.

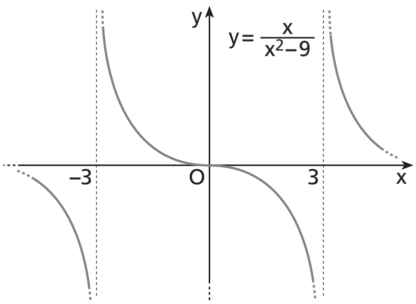


Figura 7.

Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel	Svolgi il
Problema 1	• Problema 128 pag. L 417 • Problema 132 pag. L 417 • Esercizio 151 pag. Q 127 • Esercizio 153 pag. Q 127 • Problema 254 pag. Q 142 • Problema 256 pag. Q 142
Problema 2	• Problema 15 pag. π 97 • Problema 16 pag. π 97 • Problema 19 pag. π 98 • Problema 19 pag. π 144
Quesito 1	• Quesito 3 pag. W 172 • Esercizio 240 pag. V 198 • Esercizio 241 pag. V 198 • Esercizio 299 pag. V 210
Quesito 2	• Esercizio 201 pag. U 37 • Esercizio 202 pag. U 37 • Quesito 5 pag. U 42 • Quesito 7 pag. O 148
Quesito 3	• Quesito 5 pag. π 142
Quesito 4	• Quesito 5 pag. W 167
Quesito 5	• Esercizio 232 pag. O 124 • Esercizio 233 pag. O 124
Quesito 6	• Quesito 5 pag. W 167 • Quesito 5 pag. W 171 • Quesito 11 pag. V 136
Quesito 7	• Quesito 6 pag. W 169 • Esercizio 101 pag. V 123 • Quesito 2 pag. V 136 • Quesito 12 pag. V 136
Quesito 8	• Quesito 10 pag. W 167
Quesito 9	• Quesito 10 pag. W 163
Quesito 10	• Esercizio 589 pag. U 194 • Esercizio 591 pag. U 194 • Esercizio 549 pag. U 191 • Esercizio 550 pag. U 191