Sessione straordinaria 2009 00050.2.1/1
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Si consideri la funzione f definita da:

$$f(x) = \frac{x+1}{e^{3x}}.$$

1. Si studi f e se ne tracci il grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
2. Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di flesso e si calcoli l'area del triangolo che essa forma con gli assi cartesiani.
3. Si provi che la funzione $F(x) = -\frac{1}{9}\, e^{-3x}\,(3x+4)$ è una primitiva della funzione f(x).
4. Si calcoli l'area A(k) della superficie piana, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette $x = -1$ e $x = k$ con $k > 0$. Cosa si puo' dire di A(k) quando $k \to +\infty$?

PROBLEMA 2

Sia $f(x) = a\cos^3 x + b\cos x + c$ e $x \in R$

1. Si determinino a, b, c in modo che risulti:
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}\ ,\ f(\pi) = \frac{4}{3}\ \text{ e }\ f''(\pi) = 0.$$
2. Si studi, nell'intervallo chiuso [0, 2 π], la funzione così trovata è se ne tracci il grafico γ.
3. Si scrivano le equazioni delle tangenti a γ nei due punti di flesso.
4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata da γ e dall'asse delle ascisse.

Sessione straordinaria 2009 00050.2.1/1
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si inscriva in una semisfera di raggio *r* il tronco di cono di massima superficie laterale, avente la base maggiore coincidente con quella della semisfera. Si assuma come incognita l'apotema del tronco di cono.
2. Si calcoli il limite della funzione $\frac{\ln(1+\mathrm{sen}3x)}{e^{\mathrm{tg}2x}-1}$ quando x tende a 0.
3. Si dimostri che il volume di una sfera, il volume del cilindro circoscritto e il volume del cono equilatero circoscritto sono proporzionali ai numeri 4, 6, 9.
4. Se P è un punto arbitrario del diametro MN di una data semicirconferenza, sui segmenti MP e NP, presi come diametri, si descrivano due semicirconferenze dalla stessa parte di quella data. Si dimostri che la figura (è detta *arbelo*) limitata dalle tre semicirconferenze, è equivalente al cerchio il cui diametro è medio proporzionale tra MP e NP.
5. Si determini il valore medio della funzione $f(x) = \sqrt{2x-1}$ nell'intervallo $4 \leq x \leq 6$.
6. Un bagnino è seduto su un'alta piattaforma, di modo che i suoi occhi si trovano 7 metri sopra il livello del mare. Improvvisamente emerge in superficie la pinna di un grande squalo bianco. Se l'angolo di depressione è di 4°, si stimi la distanza orizzontale tra la piattaforma e lo squalo, arrotondando il risultato all'unità.
7. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & \text{per } 0 \leq x \leq 2, \\ -x^2 + 13, & \text{per } 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

   E' applicabile ad essa, nell'intervallo chiuso [0 , 3], il teorema di Lagrange ?

8. Si risolva l'equazione: $6\left[\binom{x}{2} + \binom{x}{3}\right] = x\,(x+11)$.
9. Il $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = 0$. Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.
10. Quali punti del grafico della funzione $f(x) = \frac{2}{x^2}$ hanno distanza minima dall'origine?

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.