ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO
SESSIONE SUPPLETIVA
Tema di: MATEMATICA
a. s. 2009-2010

PROBLEMA 1

Data una circonferenza di centro O e raggio unitario, si prendano su di essa tre punti A, B, C, tali che AB = BC.

1. Si calcoli, in funzione dell'angolo AÔB = x , la quantità:

$$AB^2 + BC^2 + CA^2$$

controllando che risulti:

$$f(x) = -4\cos^2 x - 4\cos x + 8$$

2. Si studi la funzione f(x) e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$
3. Si verifichi che la curva γ è simmetrica rispetto alla retta di equazione $x = \pi$
4. Si calcoli il valore medio della funzione f(x) nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$.

PROBLEMA 2

Sia data la funzione $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

1. Si determini il dominio di *f(x)* e si dica se la funzione è continua e derivabile in ogni punto di esso.

2. Si studi la funzione *f(x)* e se ne tracci il grafico γ.

3. Si calcoli l'area della parte di piano R racchiusa dal grafico γ e dal semiasse positivo delle ascisse.

4. La regione R genera, nella rotazione attorno all'asse delle ascisse, un solido S. In S si inscriva un cono circolare retto con vertice nell'origine. Si determinino raggio e altezza del cono, affinchè il suo volume sia massimo.

QUESTIONARIO

1. In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume è stata costruita una torretta d'osservazione alta 11 metri. Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a 18° e 24°. Si determini la larghezza del fiume in quel punto.

2. Considerata la funzione $f(x) = \dfrac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x}$, dove *a* è una costante reale positiva, si determini tale costante, sapendo che $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$.

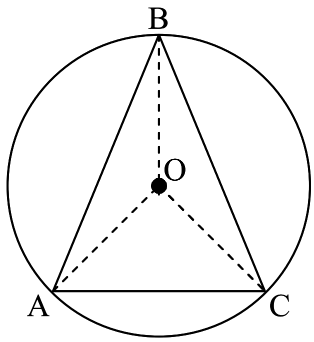
3. Su un piano orizzontale α si pongono un cono circolare retto, il cui raggio di base è *r* e l'altezza *2r,* e una sfera di raggio *r.* A quale distanza *x* dal piano α bisogna segare questi due solidi con un piano orizzontale ß, perché la somma delle aree delle sezioni così ottenute sia massima?

4. Si dimostri che per gli zeri x_1 e x_2 di una funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ vale la relazione $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$ e si dia una interpretazione geometrica della affermazione dimostrata.
5. Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, nell'intervallo $1 \leq x \leq 2$.
6. Si determinino *a* e *b* in modo tale che il grafico della funzione $y = a^{x+b}$ passi per i punti del piano xy di coordinate (1,4) e (3,8) .
7. Un tetraedro ed un ottaedro regolari hanno gli spigoli della stessa lunghezza *l.* Si dimostri che il volume dell'ottaedro è il quadruplo di quello del tetraedro.
8. Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche x = 2t e $y = \frac{2}{t^2+1}$ nel suo punto di coordinate (2,1) .
9. Si dimostri che se una funzione f(x) è derivabile nel punto x_0 , ivi è anche continua; si porti un esempio di funzione continua in un punto e ivi non derivabile.
10. Si dimostri che la differenza dei quadrati di due lati di un triangolo è uguale alla differenza dei quadrati delle rispettive proiezioni dei lati stessi sul terzo lato del triangolo.

PROBLEMA 1

Punto 1

Consideriamo la figura di seguito.



Posto $A\hat{O}B = x$ si ha $A\hat{B}O = O\hat{A}B = \frac{180° - x}{2}$.

L'angolo al vertice è $A\hat{B}C = 2 \cdot A\hat{B}O = 2 \cdot \left(\frac{180° - x}{2}\right) = 180° - x$.

Applicando il teorema di Carnot al triangolo AOB si ha:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2 - 2 \cdot \overline{AO} \cdot \overline{OB} \cdot \cos(x) = 1 + 1 - 2\cos(x) = 2 - 2\cos(x)$$

Analogamente, applicando il teorema di Carnot al triangolo ABC si ha:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos(180° - x) \xrightarrow[2)\cos(180°-x)=-\cos(x)]{1)\overline{AB}=\overline{BC}=1}$$

$$\overline{AC}^2 = 2 \cdot \overline{AB}^2 + 2 \cdot \overline{AB}^2 \cdot \cos(x) = 2 \cdot \overline{AB}^2 \cdot [1 + \cos(x)] =$$
$$= 2 \cdot [1 + \cos(x)] \cdot [2 - 2\cos(x)] = 4[1 + \cos(x)] \cdot [1 - 1\cos(x)] = 4 - 4\cos^2(x)$$

Quindi:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = 2 \cdot [2 - 2\cos(x)] + [4 - 4\cos^2(x)] = -4\cos^2(x) - 4\cos(x) + 8$$

Punto 2

Studiamo la funzione $f(x) = -4\cos^2(x) - 4\cos(x) + 8 = 4[\cos(x) + 2] \cdot [1 - \cos(x)]$ in $[0, 2\pi]$

- *Dominio*: $[0, 2\pi]$;
- *Intersezione asse ascisse*:

  $$f(x) = 0 \to [\cos(x) + 2] \cdot [1 - \cos(x)] = 0 \xrightarrow[\forall x \in [0,2\pi]]{\cos(x)+2>0} \cos(x) = 1 \to x = 0 \vee x = 2\pi$$

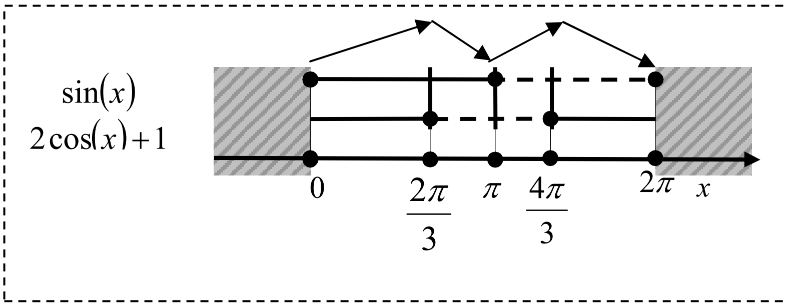
- *Intersezione asse ordinate*: $x = 0 \to f(0) = 0$
- *Simmetrie*: la funzione è periodica di periodo $T = 2\pi$ e pari in quanto

  $f(-x) = -4\cos^2(-x) - 4\cos(-x) + 8 = -4\cos^2(x) - 4\cos(x) + 8 = f(x)$;

- *Positività*: $f(x) > 0 \to 1 - \cos(x) > 0 \to \cos(x) < 1 \to \forall x \in (0, 2\pi)$;

- *Asintoti verticali*: non ve ne sono in quanto la funzione è periodica e limitata;
- *Asintoti orizzontali*: non ve ne sono in quanto la funzione è periodica e limitata;
- *Asintoti obliqui*: non ve ne sono in quanto la funzione è periodica e limitata;
- *Crescenza e decrescenza*: la derivata prima è $f'(x) = 8\sin(x)\cos(x) + 4\sin(x) = 4\sin(x)\cdot[2\cos(x)+1]$; di seguito il quadro dei segni

$$\sin(x) > 0 \Rightarrow 0 < x < \pi$$
$$\cos(x) > -\frac{1}{2} \Rightarrow 0 < x < \frac{2\pi}{3} \vee \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi$$
$$f'(x) > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{2\pi}{3} \vee \pi < x < \frac{4\pi}{3}$$



Dal quadro soprastante deduciamo che la funzione presenta un minimo relativo in $\mathrm{m} = (\pi, 8)$ e due massimi relativi in $\mathrm{M}_1 = \left(\frac{2\pi}{3}, 9\right), \mathrm{M}_2 = \left(\frac{4\pi}{3}, 9\right)$;

- *Concavità e convessità*: la derivata seconda è $f''(x) = 4\left[4\cos^2(x) + \cos(x) - 2\right]$ per cui

$$f''(x) > 0 \rightarrow \cos(x) < \frac{-1-\sqrt{33}}{8} \vee \cos(x) > \frac{-1+\sqrt{33}}{8} \rightarrow$$
$$\rightarrow 0 < x < \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right)$$
$$\pi - \arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) < x < \pi + \arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)$$
$$2\pi - \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right) < x < 2\pi$$

Quindi la funzione presenta concavità verso l'alto in

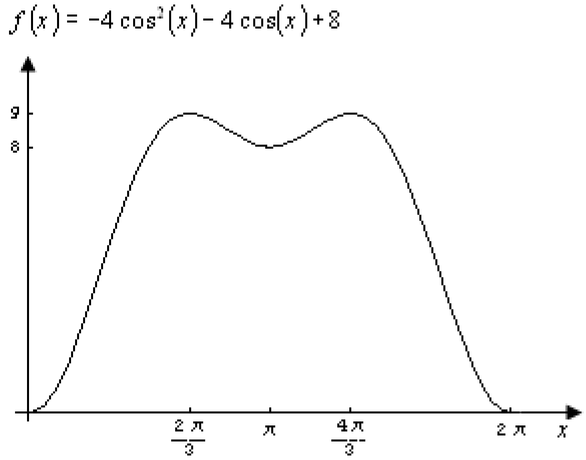
$$\left(0, \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right)\right) \cup$$
$$\left(\pi - \arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right), \pi + \arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\right) \cup$$
$$\left(2\pi - \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right), 2\pi\right)$$

e presenta quattro flessi a tangente obliqua in

$$x = \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right) \cong 53{,}6°, x = \pi - \arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) \cong 147{,}5°,$$

$$x = \pi + \arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) \cong 212{,}5°, x = 2\pi - \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right) \cong 306{,}4°$$

Il grafico è di seguito presentato:



Punto 3

Una funzione è simmetrica rispetto alla retta $x = k$ se $f(x) = f(2k - x)$. Nel caso in esame $f(2\pi - x) = -4\cos^2(2\pi - x) - 4\cos(2\pi - x) + 8 = -4\cos^2(x) - 4\cos(x) + 8 = f(x)$ per cui $f(x)$ è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.

Punto 4

Il valor medio di una funzione $f(x)$ in $[a,b]$ è $V_M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Nel caso in esame

$$V_M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-4\cos^2(x) - 4\cos(x) + 8\right]dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-4\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right) - 4\cos(x) + 8\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-2\cos(2x) - 4\cos(x) + 6\right]dx = \frac{1}{2\pi}\left[-\sin(2x) - 4\sin(x) + 6x\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot 12\pi = 6$$

PROBLEMA 2

Punto 1

Il dominio della funzione $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ è dato da: $1-x^2\geq 0 \Rightarrow -1\leq x\leq 1$.

Nel dominio la funzione è continua.

La derivata prima è $f'(x)=\sqrt{1-x^2}+x\cdot\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ da cui deduciamo che la funzione non è derivabile nei punti $x=\pm 1$ in cui presenta una tangente verticale; infatti $\lim_{x\to -1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^-} f'(x)=-\infty$. In conclusione la funzione è derivabile in tutti i punti del dominio esclusi i punti con ascisse $x=\pm 1$.

Punto 2

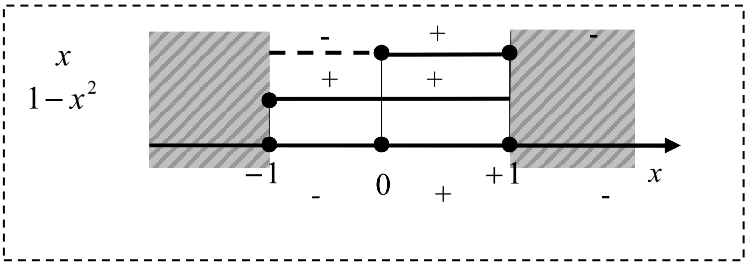
Studiamo la funzione $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$

- *Dominio*: $-1\leq x\leq 1$;
- *Intersezione asse ascisse*: $f(x)=x\sqrt{1-x^2}=0 \to x=0 \vee x=-1 \vee x=1$
- *Intersezione asse ordinate*: $x=0\to f(0)=0$
- *Simmetrie*: la funzione è dispari in quanto $f(-x)=-x\sqrt{1-(-x)^2}=-x\sqrt{1-x^2}=-f(x)$
- *Positività*:

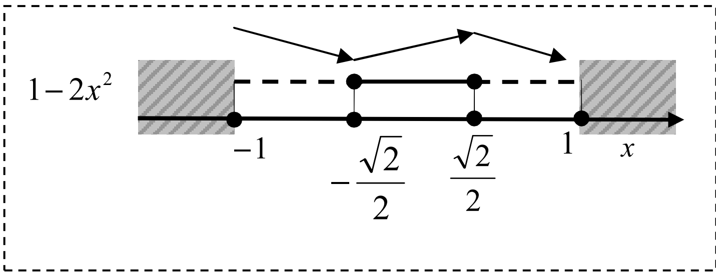
$x>0$

$1-x^2>0\Rightarrow -1<x<1$

$f(x)>0\Rightarrow 0<x<1$



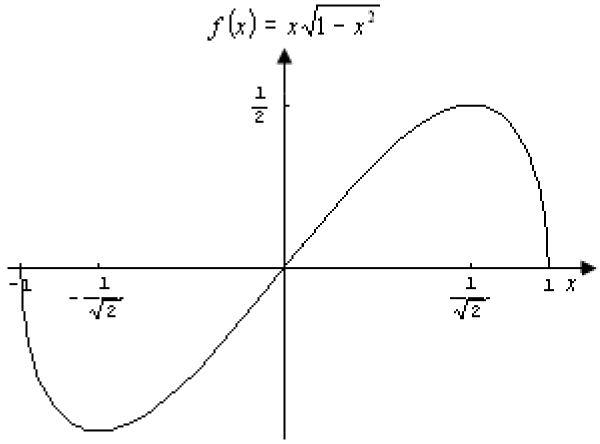
- *Asintoti verticali*: non ve ne sono in quanto $\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=0$;
- *Asintoti orizzontali*: non esistono visto il dominio chiuso $[-1,1]$;
- *Asintoti obliqui*: non esistono visto il dominio chiuso $[-1,1]$;
- *Crescenza e decrescenza*: la derivata prima è $f'(x)=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; il quadro dei segni è a lato presentato: da esso deduciamo la presenza di un minimo relativo



$m = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ed un massimo relativo $M = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

- *Concavità e convessità*: la derivata seconda è $f''(x) = \frac{-4x\sqrt{1-x^2} - (1-2x^2)\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-4x(1-x^2)+x(1-2x^2)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2x^3-3x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ per cui, ricordando che il dominio è $-1 \le x \le 1$, si ha $f''(x) > 0 \rightarrow \begin{cases} 2x^3 - 3x > 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\sqrt{\frac{3}{2}} < x < 0 \vee x > \sqrt{\frac{3}{2}} \\ -1 < x < 1 \end{cases} \rightarrow -1 < x < 0$ cioè la funzione presenta concavità verso l'alto in $(-1,0)$ e verso il basso in $(0,1)$; la funzione presenta quindi un flesso a tangente obliqua $F = (0,0)$ con tangente inflessionale di equazione $y = x$.

Di seguito il grafico:



<u>*Punto 3*</u>

L'area richiesta è pari a $S = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1 -\frac{1}{2}\frac{d(1-x^2)}{dx}\sqrt{1-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

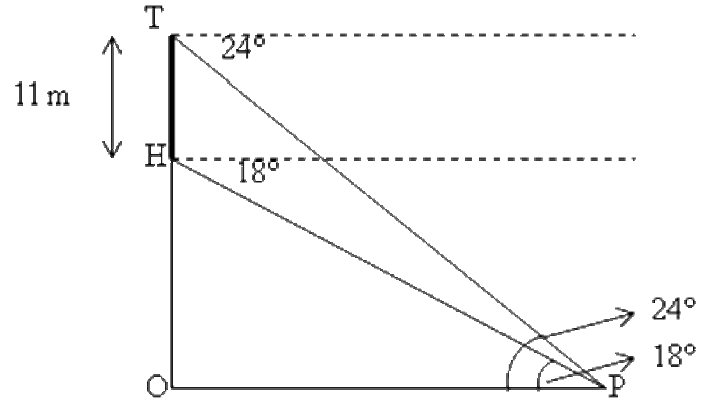
<u>*Punto 4*</u>

Sia $P\left(x, x\sqrt{1-x^2}\right)$ con $0 < x < 1$ un punto generico appartenente al ramo del primo quadrante della funzione $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$. Il raggio del cono inscritto sarà pari all'ordinata del punto P e cioè $R = x\sqrt{1-x^2}$ mentre l'altezza sarà pari all'ascissa e cioè $h = x$. Il volume del cono sarà allora $V(x) = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot x^2 \cdot (1-x^2) \cdot x = \frac{\pi}{3} \cdot (x^3 - x^5)$. La massimizzazione la effettuiamo mediante derivazione: la derivata prima è $V'(x)=\frac{\pi}{3}\cdot\left(3x^2-5x^4\right)$ per cui la funzione volume, ricordando la limitazione geometrica $0<x<1$ è strettamente crescente in $\left(0,\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ e strettamente decrescente in $\left(\sqrt{\frac{3}{5}},1\right)$ da cui deduciamo che il volume è massimo quando l'altezza è pari a $x=\sqrt{\frac{3}{5}}$ ed il raggio è pari a $R=\frac{\sqrt{6}}{5}$. Il valore massimo è pertanto pari a $V\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=\frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}-\frac{9}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=\frac{2\pi}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

QUESTIONARIO

Quesito 1

Consideriamo la figura a lato.



Dobbiamo calcolare la lunghezza del segmento PO. Applicando il teorema dei triangoli rettangoli ai triangoli POT e OH si ha la relazione

$\overline{PO}\cdot\tan(24°)-\overline{PO}\cdot\tan(18°)=11$ da cui

$\overline{PO}\cong 91\,\text{m}$

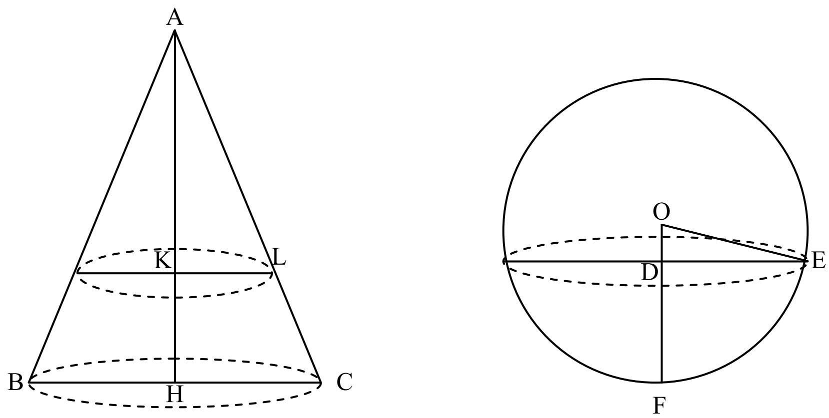
Quesito 2

Il limite richiesto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ per cui possiamo applicare il teorema di de l'Hospital: $\lim_{x\to 0}\frac{3^{3x}-a^x}{6^x-5^x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\ln 3\cdot 3^{3x}-\ln a\cdot a^x}{\ln 6\cdot 6^x-\ln 5\cdot 5^x}=\frac{3\ln 3-\ln a}{\ln 6-\ln 5}=\frac{\ln\frac{27}{a}}{\ln\frac{6}{5}}$. Imponendo

$\lim_{x\to 0}\frac{3^{3x}-a^x}{6^x-5^x}=2$ si ha $\frac{\ln\frac{27}{a}}{\ln\frac{6}{5}}=2\to\ln\frac{27}{a}=2\ln\frac{6}{5}\to\ln\frac{27}{a}=\ln\frac{36}{25}\to\frac{27}{a}=\frac{36}{25}\to a=\frac{75}{4}$.

Quesito 3

Si consideri la figura seguente:



Indichiamo con x, $0<x<2r$, la distanza tra piani α e β.

Le intersezioni del piano β con il cono e la sfera sono due circonferenze rispettivamente di raggio

$R_C = \overline{KL}$ e $R_S = \overline{DE}$. La somma delle aree delle sezioni è quindi $S = \pi \cdot R_C^2 + \pi \cdot R_S^2$. Calcoliamo ora i due raggi:

- Raggio R_C

  I triangolo AKL e AHC sono simili essendo entrambi rettangoli con un angolo in comune per cui vale la seguente proporzione tra lati omologhi: $\overline{AK} : \overline{KL} = \overline{AH} : \overline{HC}$ da cui $\overline{KL} = \frac{\overline{AK} \cdot \overline{HC}}{\overline{AH}} = \frac{(2r - x) \cdot r}{2r} = \left(r - \frac{x}{2}\right)$ per cui l'area della circonferenza di raggio $\overline{KL} = \left(r - \frac{x}{2}\right)$ è $A_C = \pi \cdot R_C^2 = \pi \cdot \left(r - \frac{x}{2}\right)^2$;

- Raggio R_S

  Il triangolo ODE è rettangolo per cui $R_S = \overline{DE} = \sqrt{\overline{OE}^2 - \overline{OD}^2} = \sqrt{r^2 - (r - x)^2} = \sqrt{2rx - x^2}$ per cui l'area della circonferenza di raggio $R_S = \overline{DE} = \sqrt{2rx - x^2}$ è $A_S = \pi \cdot R_S^2 = \pi \cdot (2rx - x^2)$.

La somma delle aree è quindi $S(x) = \pi \cdot \left(r - \frac{x}{2}\right)^2 + \pi \cdot (2rx - x^2) = \pi \cdot \left(-\frac{3}{4}x^2 + rx + r^2\right)$ con $0 < x < 2r$. Notiamo che la funzione $S(x)$ è una parabola con concavità verso il basso che presenta il massimo nell'ascissa del vertice $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{r}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}r$; quindi la somma delle due aree è massima per $x_V = \frac{2}{3}r$ e vale $S\left(\frac{2}{3}r\right) = \pi \cdot \left(-\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9}r^2 + r \cdot \frac{2}{3}r + r^2\right) = \frac{4}{3}\pi r^2$.

Alternativamente possiamo proseguire mediante derivazione: la derivata prima della funzione $S(x)$ è $S'(x) = \pi \cdot \left(-\frac{3}{2}x + r\right)$ per cui $S'(x) > 0 \to x < \frac{2}{3}r$ da cui deduciamo che $S(x)$ è strettamente crescente in $\left(0, \frac{2}{3}r\right)$ e strettamente decrescente in $\left(\frac{2}{3}r, 2r\right)$; inoltre $S''(x) = -\frac{3}{2}\pi < 0$ per cui $x = \frac{2}{3}r$ è l'ascissa del massimo.

<u>*Quesito 4*</u>

Gli zeri dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ sono $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; la derivata prima di $f(x) = ax^2 + bx + c$ è $f'(x) = 2ax + b$ per cui

$$f'(x_1) = 2a\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)+b = -\sqrt{b^2-4ac}$$

$$f'(x_2) = 2a\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)+b = +\sqrt{b^2-4ac}$$

da cui deduciamo che $f'(x_1)+f'(x_2)=0$.

Per dare un'interpretazione geometrica al risultato ottenuto riscriviamo la somma $[f'(x_1)+f'(x_2)]$: essa è pari a $f'(x_1)+f'(x_2)=(2ax_1+b)+(2ax_2+b)=2a(x_1+x_2)+2b$ e imponendo che sia nulla otteniamo $(x_1+x_2)=-\frac{b}{a}$ o equivalentemente $\frac{(x_1+x_2)}{2}=-\frac{b}{2a}$. La relazione appena ricavata ci dice che la semisomma delle soluzioni è pari a $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ che è l'ascissa del vertice; in altri termini gli zeri della parabola sono simmetrici rispetto alla retta $x=-\frac{b}{2a}$ coincidente con l'asse di simmetria della parabola.

Quesito 5

Il valor medio di una funzione $f(x)$ in $[a,b]$ è $V_M=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Nel caso in esame $V_M=\int_1^2\left[\frac{e^x(x-1)}{x^2}\right]dx$; applicando l'integrazione per parti si ha

$$V_M=\int_1^2\left[\frac{e^x(x-1)}{x^2}\right]dx=\left[-\frac{e^x(x-1)}{x}\right]_1^2+\int_1^2\left[\frac{1}{x}\cdot\left(x\cdot e^x+e^x-e^x\right)\right]dx=$$

$$=-\frac{e^2}{2}+\int_1^2 e^x dx=-\frac{e^2}{2}+e^2-e=\frac{e^2}{2}-e=\frac{e^2-2e}{2}$$

Quesito 6

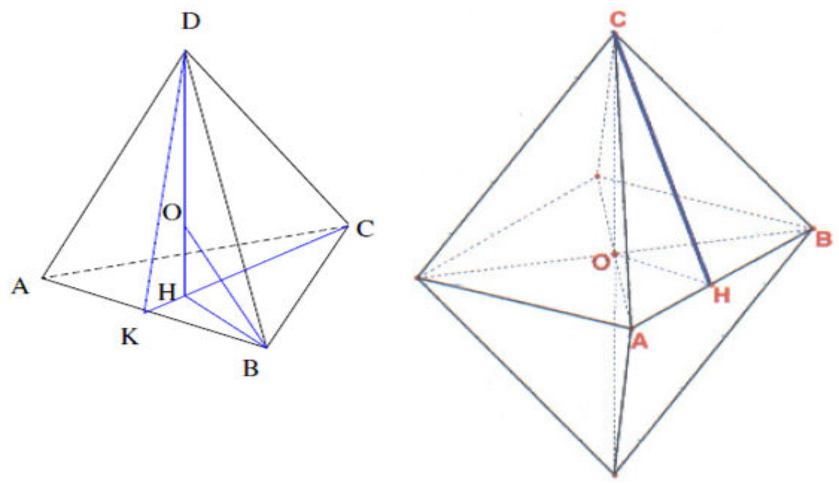
La base a della funzione potenza deve essere $a>0\wedge a\neq 1$. Imponendo il passaggio per i punti $(1,4),(3,8)$ si ha:

$$\begin{cases}a^{b+1}=4\\a^{b+3}=8\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a^{b+1}=4\\a^{b+1}\cdot a^2=8\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a^{b+1}=4\\4\cdot a^2=8\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a^{b+1}=4\\a^2=2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{2}\\2^{\frac{b+1}{2}}=2^2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{2}\\\frac{b+1}{2}=2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{2}\\b=3\end{cases}$$ in cui

la soluzione $a=-\sqrt{2}$ è stata scartata in quanto non soddisfa la condizione $a>0\wedge a\neq 1$.

Quesito 7

Consideriamo il tetraedro e l'ottaedro sottostanti:



Calcoliamo i due volumi.

- Volume tetraedro

L'altezza di ognuno dei 4 triangoli equilateri componenti è $\overline{DK} = l\frac{\sqrt{3}}{2}$; ricordando che l'ortocentro di un triangolo equilatero divide ognuna delle tre altezze in due parti di cui una doppia dell'altra si ha $\overline{KH} = \frac{1}{3} \cdot \left(l\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = l\frac{\sqrt{3}}{6}$ per cui l'altezza del tetraedro è pari a $\overline{DH} = \sqrt{\overline{DK}^2 - \overline{KH}^2} = \sqrt{\left(l\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \left(l\frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2} = l\frac{\sqrt{6}}{3}$; il volume è allora pari a

$$V_T = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l\frac{\sqrt{6}}{3}}{3} = l^3 \frac{\sqrt{2}}{12};$$

- Volume ottaedro

Il volume dell'ottaedro può essere visto come la somma dei volumi delle due piramidi componenti. In accordo con la figura soprastante si ha $\overline{OH} = \frac{l}{2}, \overline{CH} = l\frac{\sqrt{3}}{2}, \overline{CO} = \sqrt{\overline{CH}^2 - \overline{OH}^2} = l\frac{\sqrt{2}}{2}$ per cui il volume di una delle due piramidi è $V_P = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{l^2 \cdot l\frac{\sqrt{2}}{2}}{3} = l^3 \frac{\sqrt{2}}{6}$ per cui il volume dell'ottaedro è $V_O = 2V_P = l^3 \frac{\sqrt{2}}{3}$ che corrisponde al quadruplo del volume del tetraedro.

<u>*Quesito 8*</u>

Le equazioni parametriche possono essere scritte come $\begin{cases} t = \dfrac{x}{2} \\ y = \dfrac{2}{t^2+1} \end{cases}$ da cui deduciamo la curva $y = \dfrac{2}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+1} = \dfrac{8}{x^2+4}$; l'equazione della retta tangente in $(2,1)$ è $y = m(x-2)+1$ con $m = y'(2)$; la derivata prima della funzione $y = \dfrac{8}{x^2+4}$ è $y' = -\dfrac{16x}{\left(x^2+4\right)^2}$ per cui $m = y'(2) = -\dfrac{1}{2}$; in conclusione l'equazione della retta tangente è $y = -\dfrac{1}{2}(x-2)+1 = -\dfrac{x}{2}+2$.

<u>*Quesito 9*</u>

Dimostrazione

Ipotesi: $\exists$ finito il limite $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

Tesi: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Scriviamo: $f(x) = f(x_0) + \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)$

Segue:

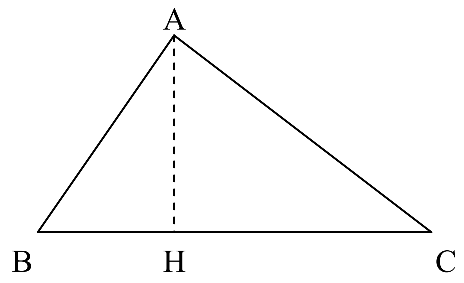
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x_0) + \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) =$$
$$= f(x_0) + \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0)} \cdot \lim_{x\to x_0}(x-x_0) =$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)\cdot 0 = f(x_0)$$

come volevasi dimostrare.

Se la derivabilità in un punto x_0 ne implica la continuità, non vale il viceversa. Basta prendere in considerazione la funzione $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ che risulta essere continua ma non derivabile in $x = 0$ in cui presenta un punto angoloso in quanto

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}(-1) = -1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}(1) = 1$$

Quesito 10



Consideriamo la figura a lato.

I triangoli AHB ed AHC sono rettangoli in H.

Applicando il teorema di Pitagora ad entrambi si ha:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HC}^2$$

Sottraendo membro a membro si ha: $\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \left(\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2\right) - \left(\overline{AH}^2 + \overline{HC}^2\right) = \overline{BH}^2 - \overline{HC}^2$ che coincide con quanto volevamo dimostrare.