ESAME DI STATO 2011 SECONDA PROVA SCRITTA PER IL LICEO SCIENTIFICO DI ORDINAMENTO

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Si considerino le funzioni f e g definite per tutti gli x reali da:

$$f(x) = x^3 - 4x \qquad \text{e} \qquad g(x) = \operatorname{sen} \pi x \,.$$

1. Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy, si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g.
2. Si calcolino le ascisse dei punti d'intersezione di G_f con la retta $y = -3$. Successivamente, si considerino i punti di G_g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-6; 6]$ e se ne indichino le coordinate.
3. Sia $\boldsymbol{R}$ la regione del piano delimitata da G_f e G_g sull'intervallo $[0; 2]$. Si calcoli l'area di $\boldsymbol{R}$.
4. La regione $\boldsymbol{R}$ rappresenta la superficie libera dell'acqua contenuta in una vasca. In ogni punto di $\boldsymbol{R}$ a distanza x dall'asse y la misura della profondità dell'acqua è data da $h(x) = 3 - x$. Quale integrale definito dà il volume dell'acqua? Supposte le misure in metri, quanti litri di acqua contiene la vasca?

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita sull'insieme $\boldsymbol{R}$ dei numeri reali da

$$f(x) = (ax + b)e^{-\frac{x}{3}} + 3$$

dove a e b sono due numeri reali che si chiede di determinare sapendo che f ammette un massimo nel punto d'ascissa 4 e che $f(0) = 2$.

1. Si provi che $a = 1$ e $b = -1$.
2. Si studi su $\boldsymbol{R}$ la funzione $f(x) = (ax + b)e^{-\frac{x}{3}} + 3$ e se ne tracci il grafico Γ nel sistema di riferimento Oxy.

3. Si calcoli l'area della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ, dall'asse y e dalla retta $y = 3$.
4. Il profitto di un'azienda, in milioni di euro, è stato rappresentato nella tabella sottostante designando con x_i l'anno di osservazione e con y_i il corrispondente profitto.

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65

Si cerca una funzione che spieghi il fenomeno dell'andamento del profitto giudicando accettabile una funzione g definita su $\boldsymbol{R}^+$ se per ciascun x, oggetto dell'osservazione, si ha $|g(x_i) - y_i| \leq 10^{-1}$. Si verifichi, con l'aiuto di una calcolatrice, che è accettabile la funzione f del punto 2 e si dica, giustificando la risposta, se è vero che, in tal caso, l'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori a 3 milioni di euro.

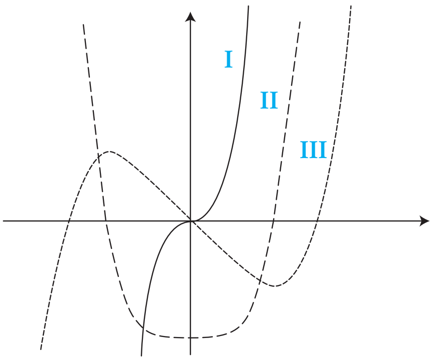
QUESTIONARIO

1. Un serbatoio ha la stessa capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 60 *cm*. Qual è la capacità in litri del serbatoio?
2. Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate (4; 0).
3. Sia R la regione delimitata dalla curva $y = x^3$, dall'asse x e dalla retta $x = 2$ e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y. Si calcoli il volume di W.
4. Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli oggetti a 3 a 3. Si trovi n.
5. Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva $y = \cos x$ e dall'asse x da $x = 1$ a $x = 2$ *radianti*.
6. Si calcoli

$$\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a}.$$

7. Si provi che l'equazione: $x^{2011} + 2011x + 12 = 0$ ha una sola radice compresa tra -1 e 0.
8. In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perché è così spesso citato?
9. Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

10. Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione f, un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f''. Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?



	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

Si motivi la risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

1. f è una funzione polinomiale dispari di terzo grado, con tre zeri reali, $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$, e coefficiente del termine di terzo grado positivo; conseguentemente, f ammette un massimo e un minimo relativi, assunti in $x = -2/\sqrt{3}$ ed $x = 2/\sqrt{3}$ rispettivamente. Inoltre, è presente un flesso nell'origine, che è centro di simmetria del grafico.
La funzione g è una funzione sinusoidale dispari, di periodo $T = 2$, essendo πx l'argomento della funzione *seno*; g quindi assume un'infinità di zeri e di massimi e minimi assoluti: gli zeri sono assunti sugli interi, mentre i massimi su $1/2 + 2k$ ed i minimi su $-1/2 + 2k$, con $k \in Z$.
I grafici di f e g sono riportati in figura 1.

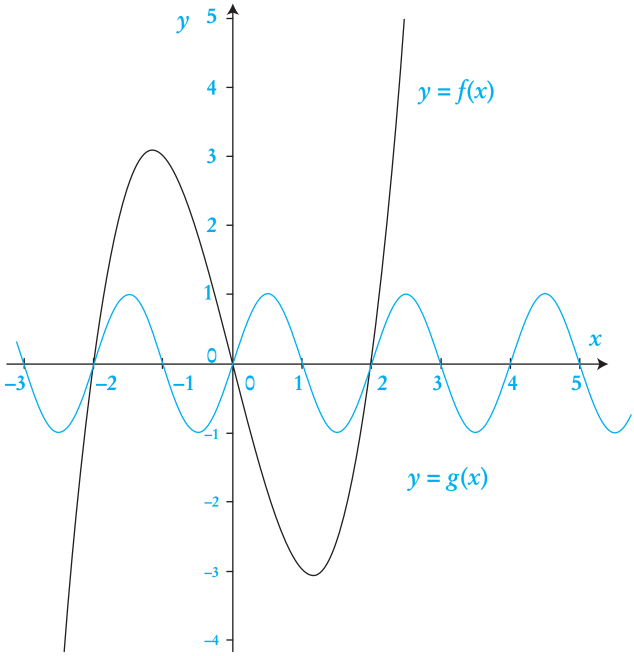


Figura 1

2. Le intersezioni tra G_f e la retta $y = -3$ sono date dalle soluzioni dell'equazione $x^3 - 4x + 3 = 0$; una volta trovata la radice $x = 1$, si determinano facilmente le altre: $x = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$ ed $x = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$. I punti a tangente orizzontale di G_g sono stati sostanzialmente determinati in precedenza: precisamente, quelli compresi nell'intervallo $[-6; -6]$ sono $\left(k+\dfrac{1}{2}, (-1)^k\right)$, con $k = -6, -5, -4, \ldots, 5$.

3. La regione R di cui calcolare l'area è rappresentata in figura 2. L'area di R si calcola rapidamente osservando la simmetria della funzione $\operatorname{sen} \pi x$: l'area (con segno) del trapezoide di $g(x)$ tra 0 e 1 è uguale all'opposto dell'area del trapezoide della stessa $g(x)$ tra 1 e 2. In definitiva

$$\mathrm{Area}(R) = \int_0^2 [g(x) - f(x)]\, dx = \int_0^2 -f(x)\, dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2\right]_0^2 = 4\,.$$

4. La vasca assume la forma in figura 2. Il calcolo del volume della vasca è un'applicazione del cosiddetto *metodo delle fette*, comparso più volte negli ultimi anni. Consideriamo una suddivisione dell'intervallo $[0; 2]$ data dai punti di $\{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ con $n \in \mathbf{N}$ e sezioniamo la vasca con i piani ortogonali all'asse x passanti per i punti x_i della suddivisione: se le sezioni S_i sono sufficientemente

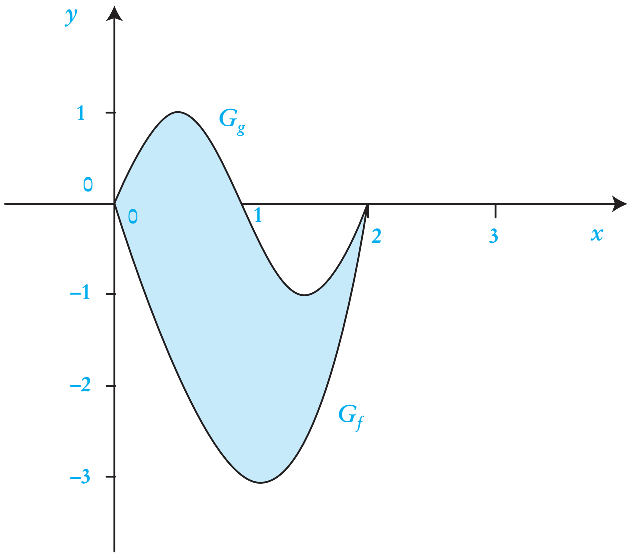


Figura 2

vicine, possiamo approssimare il volume racchiuso tra due sezioni consecutive mediante *il prodotto dell'area di una sezione per la distanza tra le due sezioni*: $\Delta V_i \approx \text{Area}(S_i)\,\Delta x_i$, dove, nel nostro caso, $\text{Area}(S_i) = [g(x_i) - f(x_i)]\,h(x_i)$ e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Allora il volume V sarà $V \approx \sum_{i=1}^{n} Area\,(S_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} [g(x_i) - f(x_i)]\,h(x_i)\,\Delta x_i$.

Passando ora al limite per $n \to +\infty$ e contemporaneamente per $\Delta x_i \to 0$, in base alla definizione di Cauchy si ottiene l'integrale definito che fornisce il volume della vasca:

$$V = \int_0^2 [g(x) - f(x)]\,h(x)\,dx = \int_0^2 (\text{sen}\,\pi x - x^3 + 4x)\,(3 - x)\,dx\,.$$

Calcolo del volume.

$$V = 3\int_0^2 \text{sen}\,\pi x\,dx + \int_0^2 (x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x)dx - \int_0^2 x\,\text{sen}\,\pi x\,dx\,.$$

Il primo integrale è nullo data la simmetria di $\text{sen}\,\pi x$ in [0: 2]; il secondo è l'integrale di una funzione polinomiale; il terzo va risolto per parti, considerando x come fattore differenziale e $\text{sen}\,\pi x$ come fattore integrante. Si ottiene

$$V = \frac{116}{15} + \frac{2}{\pi^2}.$$

Assunte le misure in metri e ricordando che 1000 litri equivalgono a 1 m^3, si conclude che la vasca contiene

$$\left(\frac{116}{15}+\frac{2}{\pi^2}\right)10^3\ l \approx 8369{,}95\ l.$$

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

1. Osserviamo che f è *continua* e *derivabile* in tutto $\mathbf{R}$ indipendentemente dai valori di a e b. Ricordando che $f(0)=2$ e $f'(4)=0$ (con f' positiva per $x<4$ e negativa per $x>4$), si ricava $f(0)=b+3=2$, da cui $b=-1$; imponendo $f'(4)=0$, dopo aver sostituito $b=-1$ nell'espressione di f, si ricava $a=1$, da cui $f(x)=(x-1)\,e^{-\frac{x}{3}}+3$.

2. *Segno e intersezioni con gli assi.* Sappiamo che $f(0)=2$, cioè il grafico Γ di f interseca l'asse delle ordinate in $y=2$. Rimandiamo lo studio dell'intersezione con l'asse delle ascisse e del segno di f a quando avremo determinato la derivata di f.
Calcolo dei limiti.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=3.$$

Nel primo limite compare il prodotto di funzioni infinite per $x\to-\infty$, mentre nel secondo il limite di $(x-1)\,e^{-\frac{x}{3}}$ per $x\to+\infty$ è nullo essendo $(x-1)$ infinito di ordine inferiore rispetto a $e^{\frac{x}{3}}$. Il secondo limite assicura che la retta $y=3$ è asintoto orizzontale per il grafico di f. Osserviamo inoltre che non ci sono asintoti obliqui per $x\to-\infty$, dal momento che $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$.
Monotonia.

$$f'(x) = \frac{1}{3}(4-x)\,e^{-\frac{x}{3}}$$

Il segno di f' è dato dal fattore $(4-x)$, quindi f è crescente per $x<4$ e decrescente per $x>4$; pertanto il massimo assunto da f in $x=4$ è un massimo assoluto e si ha $f(4)=3(e^{-\frac{4}{3}}+1)$.
Tenendo presenti i limiti, se ne deduce che il grafico Γ di f ha una sola intersezione con l'asse delle ascisse; con qualche tentativo, si trova che Γ interseca l'asse x tra -2 e -1; f assume valori negativi prima di tale intersezione e positivi dopo.

Concavità.

$$f''(x) = \frac{1}{9}(x-7)e^{-\frac{x}{3}}$$

Il segno di f'' è dato dal fattore $(x-7)$: pertanto f è concava per $x<7$ e convessa per $x>7$; quindi f ammette in $x=7$ un flesso obliquo di coefficiente angolare $f'(7) = -e^{-\frac{7}{3}}$.

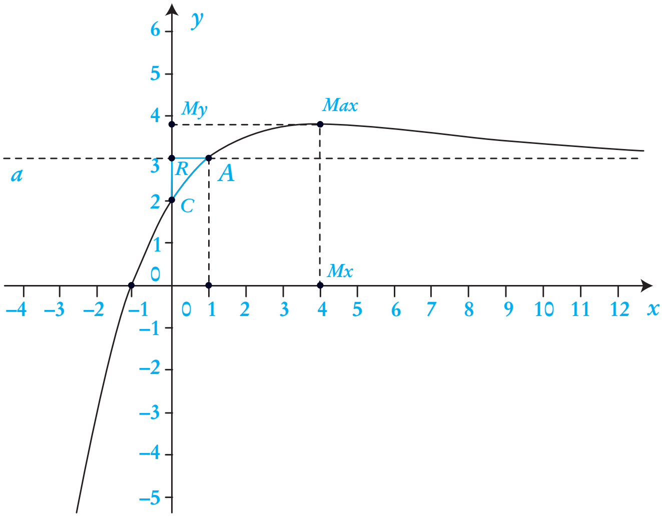


Figura 3

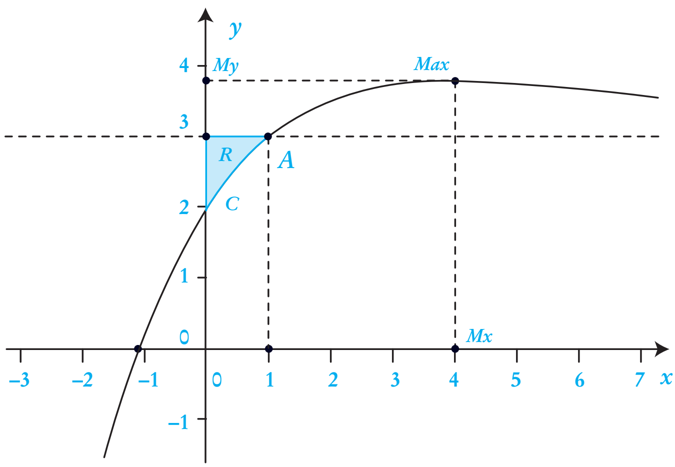


Figura 4

3. L'asintoto orizzontale $y = 3$ interseca il grafico Γ nel punto (1; 3). La regione è quella colorata in figura 4 e la sua area è data da

$$A = \int_0^1 (3 - f(x))\,dx = \int_0^1 (1-x)e^{-\frac{x}{3}}\,dx = \int_0^1 e^{-\frac{x}{3}}\,dx - \int_0^1 xe^{-\frac{x}{3}}\,dx.$$

Il secondo integrale dell'ultimo membro si effettua per parti; si ottiene $A = 3(3e^{-\frac{1}{3}} - 2)$.

4. La seguente tabella riassume i dati forniti dal problema, i valori che la funzione f assume negli x_i (con approssimazione al centesimo) e il confronto tra $f(x_i)$ e i dati effettivi y_i.

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65
$f(x_i)$	2	3	3,51	3,74	3,79	3,76	3,68
$\lvert f(x_i) - y_i \rvert$	0,03	0,02	0,02	0,03	0,01	0	0,03

La differenza $|f(x_i) - y_i|$ è sempre minore di 10^{-1} e quindi possiamo affermare che f è accettabile come modello per i dati forniti.
Tuttavia, in base ai dati a disposizione non possiamo affermare che l'evoluzione del fenomeno non porterà a profitti inferiori a 3 milioni di euro. Infatti, indicando con y_{20} il dato al 2020 e osservando che $f(20) = 19e^{-\frac{20}{3}} + 3$, dalla condizione $|f(20) - y_{20}| \le 10^{-1}$ si ricava $2{,}92\ldots < y_{20} < 3{,}12\ldots$: non ci sono quindi garanzie che l'evoluzione del fenomeno non porterà a profitti inferiori ai 3 milioni di euro.

RISPOSTE AL QUESTIONARIO

1. Questo è un tipico problema di massimo. In figura 5 riportiamo una sezione della figura con un piano contenente l'asse del cilindro. Indicato con $R_S = AO$ il raggio della sfera, poniamo $CD = 2x$, osservando che $0 < x < R_S$.
La base AD del rettangolo $ABCD$, che è anche il diametro del cerchio di base del cilindro inscritto, è tale che $AD^2 = AC^2 - CD^2 = 4R_S^2 - 4x^2$.
Il volume del cilindro risulta quindi

$$V(x) = \pi\left(\frac{AD}{2}\right)^2 CD = 2\pi(R_S^2 - x^2)x$$

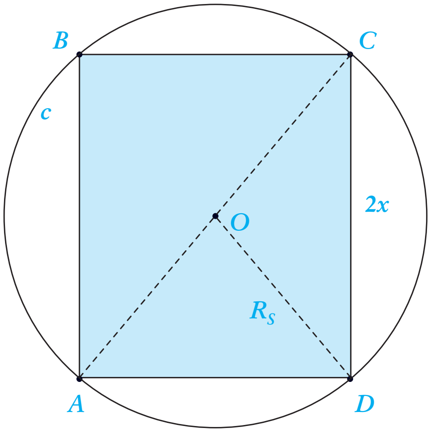


Figura 5

Per determinare il cilindro di volume massimo, studiamo gli estremali della funzione $V(x)$. Per il Teorema di Weierstrass, $V(x)$ ammette massimo assoluto in quanto continua in $[0; R_S]$. Ora

$$V'(x) = 2\pi(R_S^2 - 3x^2);$$

quindi $V(x)$ è crescente per $x < \frac{R_S}{\sqrt{3}}$ e decrescente per $x > \frac{R_S}{\sqrt{3}}$. Di conseguenza $V(x)$ assume il massimo $V(x_{\max}) = \frac{4\sqrt{3}\pi}{9}R_S^3$ per $x_{\max} = \frac{R_S}{\sqrt{3}}$. Sostituendo il valore del raggio della sfera, $R_S = 6\,dm$, si ottiene $V(x_{\max}) = 96\pi\sqrt{3}\ dm^3 \approx 522,4\ l$.

2. Questo è un tipico quesito di minimo; si rinvia all'articolo sul tema PNI per l'usuale approccio analitico; qui si propone una risoluzione geometrico-vettoriale, in linea con le nuove Indicazioni nazionali.
Il punto Q, a distanza minima da $P(4; 0)$ è il punto della curva C di equazione data tale che la retta PQ risulti perpendicolare a C in Q, ossia alla tangente τ passante per Q (figura 6).
Scritta l'equazione di C in forma parametrica $C(x) = \left(x, \sqrt{x}\right)$, il vettore tangente è $\vec{t} = \frac{dC(x)}{dx} = \left(1, \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$, mentre il vettore PQ, dove Q è il generico punto della curva, è $PQ = \left(x-4, \sqrt{x}\right)$. Imponendo la condizione che i due vettori siano ortogonali, ossia che il loro prodotto scalare sia 0, si ha $\vec{t} \times PQ = \left(1, \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \times \left(x-4, \sqrt{x}\right) = x - 4 + \frac{1}{2} = 0$, da cui si ricava $x = 7/2$. E quindi il punto di C che realizza la minima distanza è $Q = \left(7/2, \sqrt{7/2}\right)$.

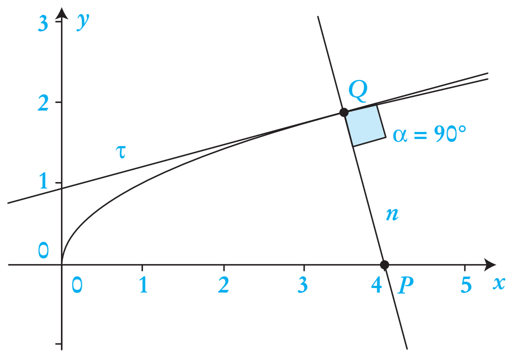


Figura 6

Aggiungiamo che la tecnica presentata consente di determinare i punti di minima o massima distanza se la curva è regolare.

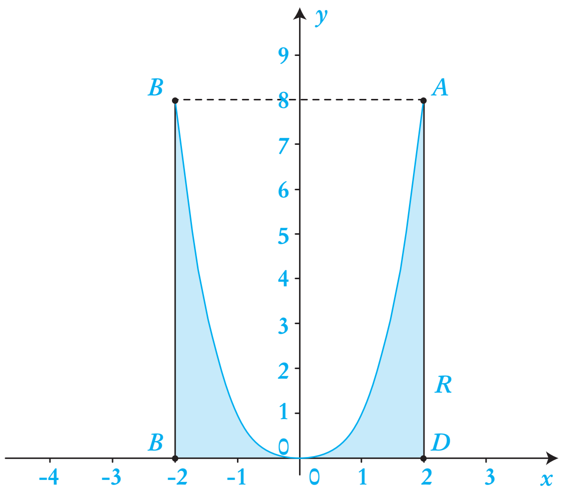


Figura 7

3. W è un solido di rotazione attorno all'asse y; il suo volume si determina sottraendo dal cilindro C di altezza 8 e raggio di base 2 il volume della «tazza» di profilo $y = x^3$. Quest'ultimo volume si ottiene invertendo la funzione $y = x^3$ (figura 7) e integrando tra 0 e 8 rispetto a y il quadrato della funzione ottenuta:

$$Vol(W) = Vol(C) - \int_0^8 \pi\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 dy = \frac{64}{5}\pi.$$

Per altri approcci si veda l'analogo quesito 3 del tema PNI.

4. Il testo non precisa se le combinazioni siano semplici o meno; è probabile che si faccia riferimento alle combinazioni semplici. Affinché il problema abbia significato deve essere $n \geq 4$. Imponendo che il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 sia uguale al numero delle combinazioni degli oggetti a 3 a 3, si ottiene l'equazione

$$\binom{n}{4} = \binom{n}{3}$$

che equivale a

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!};$$

si ottiene così la soluzione $n = 7$.
Alternativamente, si può osservare che, dato n, due coefficienti binomiali $\binom{n}{k}$ e $\binom{n}{h}$ sono uguali se e solo se $h = k$ oppure $h + k = n$, per la simmetria della sequenza dei coefficienti e il fatto che i coefficienti sono crescenti per $k \leq n/2$ e decrescenti per $k \geq n/2$. Nel nostro caso ciò significa $n = 4 + 3$.

5. La regione di cui calcolare l'area è rappresentata in figura 8. L'area è data da $A = A_1 - A_2$ in cui

$$A_1 = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \quad \text{e} \quad A_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^2 \cos x \, dx$$

quindi

$$A = 2 - \text{sen } 1 - \text{sen } 2.$$

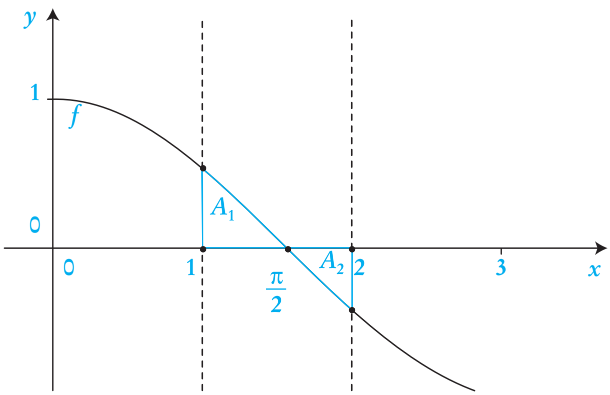


Figura 8

6. Il limite proposto è una forma indeterminata del tipo «0 su 0» e si determina agevolmente con la regola di de l'Hospital.

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 a}.$$

Alternativamente il limite richiesto si può risolvere ricorrendo a un limite fondamentale: infatti

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\cos x\cos a}\,\frac{\sin(x-a)}{x-a}=\frac{1}{\cos^2 a}.$$

7. Il teorema degli zeri assicura che la funzione $f(x)=x^{2011}+2011x+12$ ha almeno uno zero in $[-1; 0]$ in quanto è continua e assume valori di segno opposto agli estremi di tale intervallo. f ammette un unico zero in $[-1; 0]$ poiché è strettamente crescente per ogni x in $\boldsymbol{R}$ in quanto la sua derivata prima, $f'(x)=2011x^{2010}+2011$, è positiva in tutto $\boldsymbol{R}$.

8. In generale il problema della quadratura del cerchio consiste nella costruzione di un quadrato equivalente ad un cerchio di raggio noto. Probabilmente l'estensore del testo implicitamente alludeva non tanto al problema generale, ma al problema *euclideo* che consiste nella costruzione con *soli riga e compasso* di un quadrato equivalente ad un cerchio di raggio noto. Il problema equivale alla rettificazione della circonferenza e anche alla costruzione di un segmento di lunghezza π a partire da un segmento di lunghezza unitaria.
Ancor più ambigua risulta la seconda richiesta. Si può affermare che la generale notorietà del problema euclideo è probabilmente dovuta alla semplice formulazione del problema stesso, che per questo ha attratto (e continua in realtà ad attrarre) molti non esperti, e soprattutto alla non risolubilità del problema stesso, la cui prova richiede metodi non elementari e risale solamente al diciannovesimo secolo.

Per i **quesiti 9 e 10** si veda la risoluzione del tema PNI.

COMMENTI

Il tema proposto quest'anno presenta dei tratti molto interessanti ed alcune profonde incongruenze. È evidente e lodevole l'impegno volto ad evitare calcoli noiosi e di scarso significato, così come la proposta di quesiti diversificati. Tuttavia la differenza di difficoltà dei due problemi è evidente, così come l'ambiguità di alcuni quesiti.

Il Problema 1 presenta tre punti banali con richieste poco significative (in particolare i primi due punti) come lo studio completo delle funzioni $f(x)=x^3-4x$ e $g(x)=\operatorname{sen}\pi x$ (per quest'ultima sarebbe stata preferibile la presenza di una parentesi), e un punto finale al di fuori della portata di studenti di un liceo scientifico ordinario. Difficilmente, infatti, tali argomenti vengono affrontati, anche solo per mezzo di esempi.

Il Problema 2 è un problema ben strutturato nei primi tre punti, con richieste congrue ad un tema di ordinamento; non è chiaro, invece, il significato del quarto punto: un problema di modellizzazione e di analisi evolutiva, tematica che esula completamente dalle competenze e conoscenze degli studenti di liceo. Infatti, nonostante il problema sembri di semplice interpretazione, in base alla correzione proposta si nasconde un'insidia, semplice per chi è pratico di problemi di questo tipo, ma estremamente complessa per i neofiti. La domanda sembra suggerire una facile risposta affermativa grazie alla presenza dell'asintoto $y = 3$; tuttavia un'analisi più attenta mette in dubbio tale risposta.

I quesiti presentati erano in gran parte alla portata degli studenti.

Molto interessante il quesito 10, che pone al centro l'argomentazione matematica; di dubbia formulazione, invece, come indicato in fase di correzione, il quesito 8. Nella prima parte non viene indicato chiaramente il problema, non essendo specificato se si intendeva il problema euclideo. Ambigua anche la seconda parte della richiesta «*Perché è così spesso citato*?»: è davvero *così spesso* citato? Le vere competenze matematiche richieste per rispondere esaurientemente a questa domanda sono al di fuori delle conoscenze degli studenti, e la risposta si riduce così a rapide osservazioni legate alla non risolubilità del problema euclideo data la trascendenza di π.

Il quesito 5 termina con la parola radianti in corsivo che può indurre (e in molti casi ha effettivamente indotto) in errore gli studenti; non si capisce l'intenzione del redattore nel porre quella parola (che presumibilmente si riferiva tanto ad 1 quanto a 2) e soprattutto nel porla in corsivo.

In conclusione è chiara l'urgenza di un *Syllabus* attorno al quale lavorare e costruire la programmazione. È infatti impensabile che di anno in anno i docenti si vedano costretti a dover inseguire e cercare di indovinare le richieste dei temi, affrontando tematiche tra le più diverse, magari tramite esempi senza il supporto di un adeguato percorso teorico, mentre parti importanti del percorso (geometria, trigonometria e teoria del calcolo differenziale e integrale) vengono spesso ignorate.

Nicola Sansonetto

Liceo Scientifico G. Fracastoro, Verona
nicola.sansonetto@gmail.com