SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
CORSO DI ORDINAMENTO 2013

1. Data la funzione integrale

$$f(x) = \int_0^x \left[\cos\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right] dt,$$

per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la sua derivata coincide con la funzione integranda:

$$f'(x) = \cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}.$$

Possiamo calcolare i valori richiesti:

$$f'(\pi) = \cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$f'(2\pi) = \cos\frac{2\pi}{2} + \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

2. Per disegnare il grafico Σ di $f'(x)$, calcoliamo le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani.

Asse y:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \cos\frac{0}{2} + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \left(0; \frac{3}{2}\right).$$

Asse x:

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Determiniamo le soluzioni dell'equazione

$$\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$$

nell'intervallo [0, 9].

Si ottiene

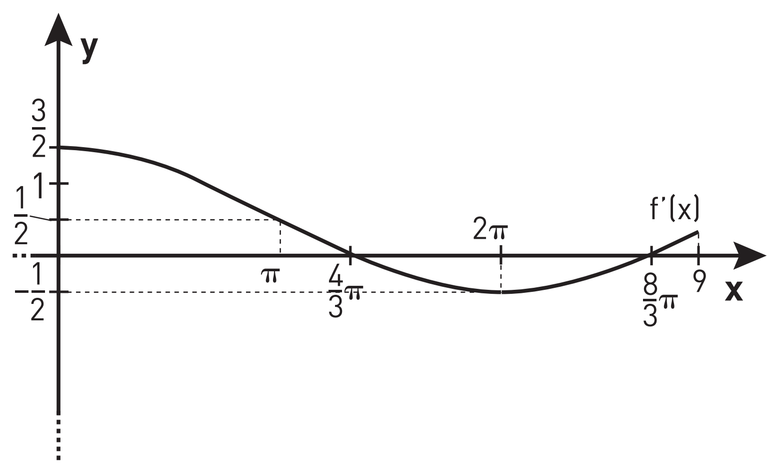
$$\frac{x}{2} = -\frac{2}{3}\pi + 2h\pi, \text{ con } h \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{4}{3}\pi + 4h\pi.$$

oppure

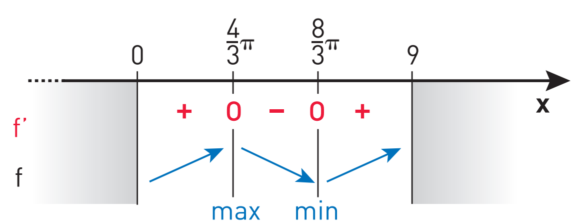
$$\frac{x}{2} = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{3}\pi + 4k\pi.$$

Nell'intervallo $[0, 9]$ le soluzioni da considerare sono $x = \frac{8}{3}\pi$ che si ottiene per $h = 1$ e $x = \frac{4}{3}\pi$ che si ottiene $k = 0$.

La funzione $f'(x)$ si ottiene mediante una dilatazione della funzione coseno rispetto all'asse x e una sua traslazione rispetto all'asse y. Disegniamo il grafico Σ di $f'(x)$.



Dal grafico dei segni di $f'(x)$ determiniamo gli intervalli di crescenza e decrescenza di $f(x)$.



La funzione $f(x)$ ha un massimo per $x = \frac{4}{3}\pi$ e un minimo per $x = \frac{8}{3}\pi$.

Per $x = 0$ è:

$$f(0) = \int_0^0 \left[\cos\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right]\, dt = 0.$$

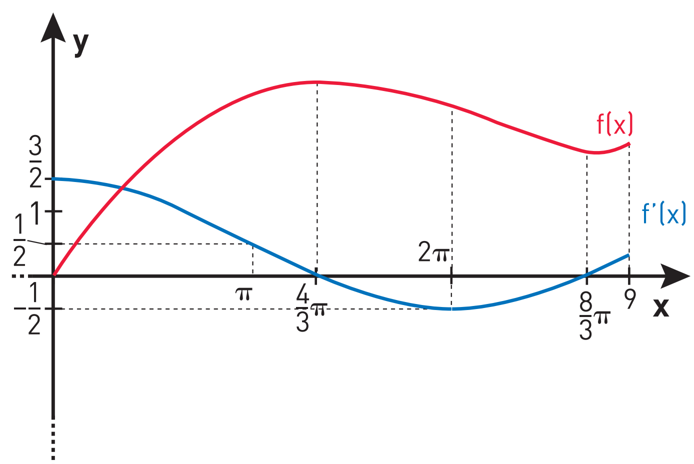
La retta tangente al grafico di $f(x)$ in $x = 0$ ha coefficiente angolare pari a

$$f'(0) = \frac{3}{2} = 1,5;$$

tale retta passa per l'origine e ha equazione $y = \frac{3}{2}x$. Poiché $f'(x)$ ha un punto di minimo per $x = 2\pi$ (è decrescente in un intorno sinistro, crescente in un intorno destro), risulta che $f''(x)$ si annulla in $x = 2\pi$ (è negativa in un intorno sinistro, positiva in un intorno destro).

Quindi $x = 2\pi$ è un punto di flesso per $f(x)$, con concavità verso il basso in un intorno sinistro e verso l'alto in un intorno destro.

Con le informazioni ottenute possiamo disegnare un possibile grafico di $f(x)$.



3. Il valor medio di $f'(x)$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ è dato da:

$$m = \frac{1}{2\pi - 0} \int_0^{2\pi} f'(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right)\, dx.$$

Calcoliamo l'integrale con il metodo di sostituzione. Poniamo

$$\frac{x}{2} = t,$$

dunque $x = 2t$ e $dx = 2dt$. Se $x = 0$, si ha $t = 0$; se $x = 2\pi$, allora $t = \pi$. Quindi

$$\int_0^{2\pi} \left(\cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right)\, dx = \int_0^{\pi} \left(\cos t + \frac{1}{2} \right)\, 2dt = 2 \left[\operatorname{sen} t + \frac{1}{2} t \right]_0^{\pi} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Il valor medio è quindi uguale a

$$m = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi = \frac{1}{2}.$$

4. Il volume V del solido W è dato dall'integrale esteso all'intervallo $[0; 4]$ della funzione $A(x)$ che esprime l'area di ciascuna sezione.

$$V = \int_0^4 A(x)\ dx = \int_0^4 3 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} x\ dx = \left[3 \left(-\cos \frac{\pi}{4} x \right) \cdot \frac{4}{\pi} \right]_0^4 =$$
$$= 3(-\cos \pi) \cdot \frac{4}{pi} - 3(-\cos 0) \cdot \frac{4}{\pi} = \frac{12}{\pi} + \frac{12}{\pi} = \frac{24}{\pi}.$$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
CORSO DI ORDINAMENTO 2013

1. Studiamo la funzione $f(x) = \dfrac{8}{4+x^2}$, con dominio $\mathbb{R}$ (infatti $x^2 + 4 \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$).

   Notiamo che
   $$f(-x) = \frac{8}{4+(-x)^2} = \frac{8}{4+x^2} = f(x),$$
   cioè la funzione è pari e il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse y.

   Cerchiamo ora le intersezioni di f con gli assi cartesiani.

   Asse x:
   $$\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{8}{4+x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{8}{4+x^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \nexists x \end{cases}$$

   Asse y:
   $$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{8}{4+x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{8}{4} = 2 \end{cases}$$

   La funzione interseca dunque l'asse y nel punto $M(0;2)$.

   Passiamo allo studio del segno della funzione f:
   $$f(x) > 0 \Rightarrow \frac{8}{4+x^2} > 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R},$$
   dunque f è positiva (strettamente).

   Calcoliamo i limiti della funzione e ricerchiamone gli eventuali asintoti. Notiamo innanzitutto che, poiché f è definita su tutto $\mathbb{R}$, la funzione non presenta nessun asintoto verticale. Possiamo però calcolare i limiti per x che tende all'infinito:
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{4+x^2} = 0,$$
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{8}{4+x^2} = 0.$$

Esiste quindi un asintoto orizzontale ed è $y = 0$. Non serve ricercare eventuali asintoti obliqui.

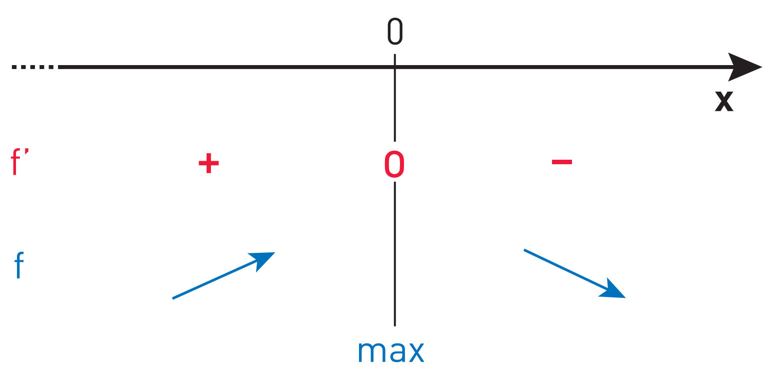
Procediamo calcolando la derivata prima di f:

$$f'(x) = -\frac{8 \cdot 2x}{(4+x^2)^2} = -\frac{16x}{(4+x^2)^2}$$

e studiandone il segno:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow -\frac{16x}{(4+x^2)^2} > 0 \Rightarrow \frac{16x}{(4+x^2)^2} < 0.$$

Compiliamo lo schema dei segni: il numeratore assume segno positivo per $x > 0$, mentre il denominatore è positivo per ogni x in $\mathbb{R}$. Quindi $f'(x) > 0$ per $x < 0$, cioè la funzione f è crescente per $x < 0$, presenta un massimo in $x = 0$ (in cui assume valore $f(0) = 2$) e decresce per $x > 0$.



Studiamo ora la concavità della funzione, calcolandone la derivata seconda.

$$f''(x) = -\frac{16(4+x^2)^2 - 16x \cdot 2(4+x^2)2x}{(4+x^2)^4} = -\frac{16(4+x^2)^2 - 64x^2(4+x^2)}{(4+x^2)^4} =$$
$$= -\frac{(4+x^2)(64+16x^2-64x^2)}{(4+x^2)^4} = \frac{48x^2-64}{(4+x^2)^3} = \frac{16(3x^2-4)}{(4+x^2)^3}$$

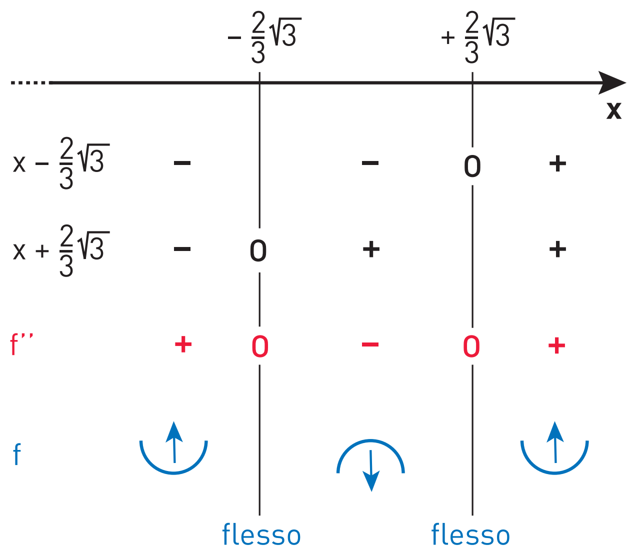
Vediamo il segno di f'':

$$f''(x) > 0 \Rightarrow \frac{16(3x^2-4)}{(4+x^2)^3} > 0$$

e studiamone separatamente numeratore e denominatore:

$$16(3x^2-4)>0 \Rightarrow 3x^2-4>0 \Rightarrow x^2-\frac{4}{3}>0 \Rightarrow x<-\frac{2}{\sqrt{3}} \vee x>\frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$\rightarrow x<-\frac{2}{3}\sqrt{3} \vee x>\frac{2}{3}\sqrt{3},$$
$$(4+x^2)^3>0 \Rightarrow 4+x^2>0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

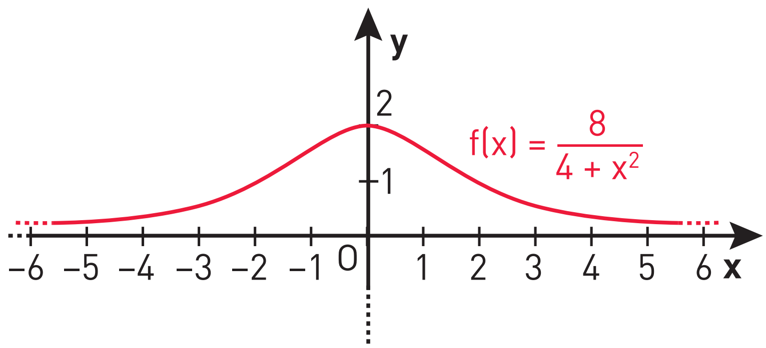
Compiliamo nuovamente lo schema dei segni.



Notiamo che f è convessa per $x<-\frac{2}{3}\sqrt{3}$, concava per $-\frac{2}{3}\sqrt{3}<x<\frac{2}{3}\sqrt{3}$ e di nuovo convessa per $x>\frac{2}{3}\sqrt{3}$. Vi sono dunque due punti di flesso, che chiameremo G e H, di coordinate:

$$f\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)=\frac{8}{4+\frac{4}{3}}=\frac{3}{2}\rightarrow G\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3};\frac{3}{2}\right),$$
$$f\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)=\frac{8}{4+\frac{4}{3}}=\frac{3}{2}\rightarrow H\left(\frac{2}{3}\sqrt{3};\frac{3}{2}\right).$$

Con le informazioni dedotte finora, possiamo finalmente tracciare il grafico della funzione.



Cerchiamo le equazioni delle tangenti a Φ in $P(-2;1)$ e $Q(2;1)$. A tal fine, calcoliamo la pendenza delle tangenti in questi due punti.

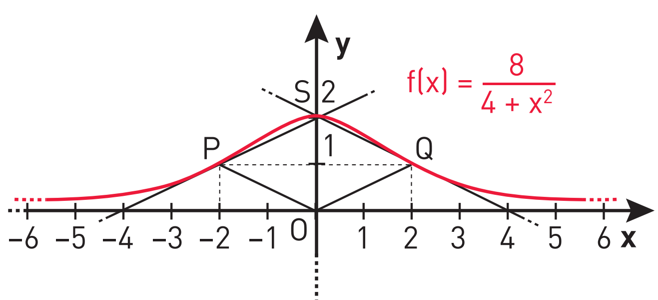
$$f'(-2) = -\frac{16(-2)}{(4+(-2)^2)^2} = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$$
$$f'(2) = -\frac{16 \cdot 2}{(4+2^2)^2} = -\frac{32}{64} = -\frac{1}{2}$$

La generica retta per P è $y-1 = m(x+2)$. Allora deve valere $m = \frac{1}{2}$, dunque la tangente a Φ in P è

$$y - 1 = \frac{1}{2}x + 1 \to t_1 : y = \frac{1}{2}x + 2.$$

La generica retta per Q è $y-1 = m(x-2)$. Di nuovo, deve valere $m = -\frac{1}{2}$, dunque la tangente a Φ in Q è

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x-2) \to t_2 : y = -\frac{1}{2}x + 2.$$



Troviamo le coordinate del punto d'intersezione delle due rette t_1 e t_2:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

e chiamiamo questo punto $S(0;2)$.

Per verificare che il quadrilatero è un rombo, dobbiamo controllare che è un parallelogrammo e che i suoi quattro lati sono congruenti.

Verifichiamo dapprima che i lati sono a due a due parallelli. Troviamo l'equazione della retta che passa per OP:

$$r_{OP}: \frac{y}{1} = \frac{x}{-2} \Rightarrow r_{OP}: y = -\frac{1}{2}x$$

e l'equazione della retta che passa per OQ:

$$r_{OQ}: y = \frac{y}{2} = \frac{x}{1} \Rightarrow r_{OQ}: y = \frac{1}{2}x.$$

Dunque $r_{OP} /\!/ t_2$ e $r_{OQ} /\!/ t_1$, quindi $OQSP$ è un parallelogrammo. Calcoliamo ora le misure dei lati, ricordando la formula

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_{P_2} - x_{P_1})^2 + (y_{P_2} - y_{P_1})^2}.$$

$\overline{OP} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$,
$\overline{OQ} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$,
$\overline{PS} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$,
$\overline{SQ} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$,
dunque $OQSP$ è un rombo.

Ricordiamo che, date due rette s e t, la tangente dell'angolo γ compreso tra le due è data da

$$\operatorname{tg}\gamma = \left|\frac{m_s - m_t}{1 + m_s m_t}\right|.$$

Dunque vale:

$$\operatorname{tg} S\hat{P}O = \left|\frac{1}{1 - \frac{1}{4}}\right| = \frac{4}{3} \Rightarrow S\hat{P}O \simeq 53°08'.$$

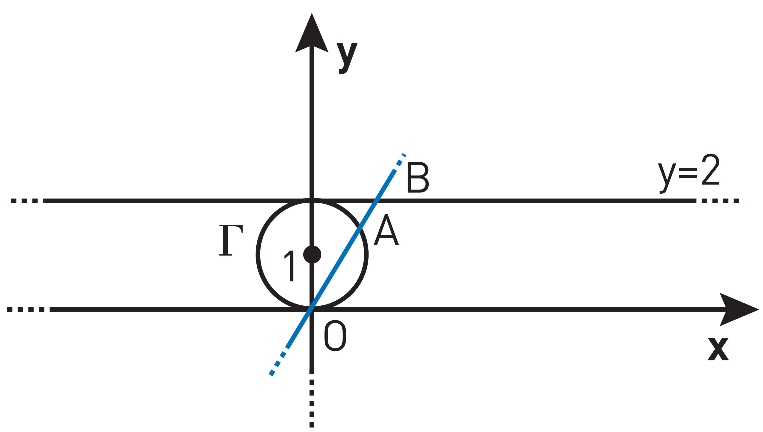
Poiché $OQSP$ è un rombo, $S\hat{P}O = S\hat{Q}O$ e $P\hat{S}Q = Q\hat{O}P = 180° - S\hat{P}O = 180° - 53°08' = 136°52'$.

2. La circonferenza Γ ha equazione $x^2+(y-1)^2=1$ e l'equazione di una generica retta passante per l'origine è $t: y=mx$. Calcoliamo le coordinate di A.

$$\begin{cases} y=mx \\ x^2+(y-1)^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=mx \\ x^2+m^2x^2-2mx=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y=mx \\ x^2(m^2+1)-2mx=0 \end{cases}$$

Per $x=0$, otteniamo l'origine O. Possiamo quindi supporre $x \neq 0$ e semplificare la seconda equazione:

$$\begin{cases} y=mx \\ x(m^2+1)-2m=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2m}{m^2+1} \\ y=\dfrac{2m^2}{m^2+1} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{2m}{m^2+1}; \frac{2m^2}{m^2+1}\right).$$



Calcoliamo le coordinate di B:

$$\begin{cases} y=mx \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{m} \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{2}{m}; 2\right).$$

Verifichiamo che (x_B, y_A) è un punto di Φ sostituendo nell'equazione $y=f(x)$. Deve valere:

$$y_A = \frac{8}{4+x_B^2},$$

cioè

$$\frac{2m^2}{m^2+1} = \frac{8}{4+\dfrac{4}{m^2}} \Rightarrow \frac{2m^2}{m^2+1} = \frac{8}{\dfrac{4m^2+4}{m^2}}$$
$$\Rightarrow \frac{2m^2}{m^2+1} = \frac{8m^2}{4m^2+4}$$
$$\Rightarrow \frac{2m^2}{m^2+1} = \frac{2m^2}{m^2+1}.$$

Il punto (x_B, y_A) appartiene effettivamente a Φ.

3. Calcoliamo l'area di R con un integrale.

$$\mathcal{A}(R) = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{8}{4+x^2}\,dx = 8\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx =$$
$$= 8\int_0^2 \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{2}\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}\,dx = 4\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right]_0^2 = 4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi.$$

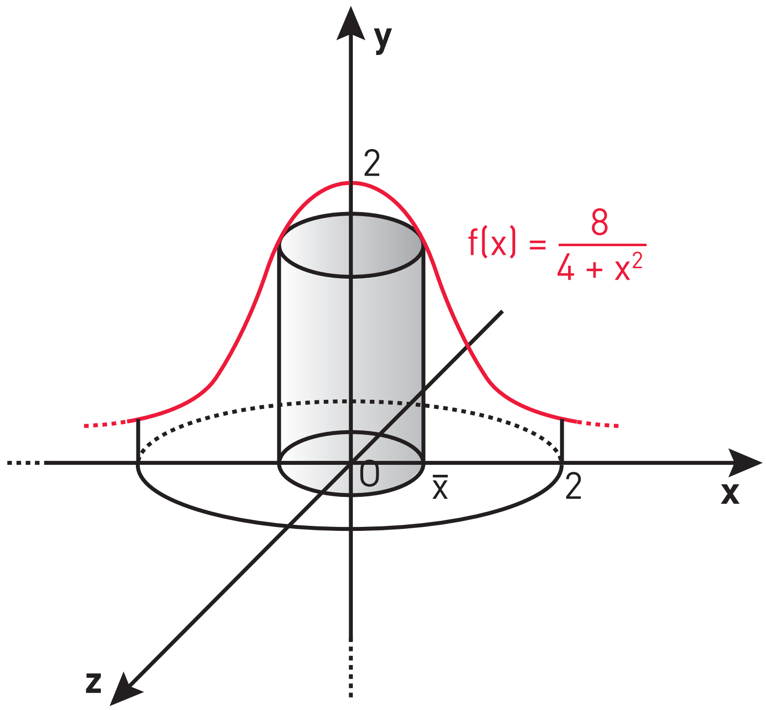
L'area del cerchio delimitato da Γ è invece data dalla formula

$$A_\Gamma = \pi r^2 = \pi.$$

Dunque R e il cerchio delimitato da Γ sono equivalenti. Calcoliamo ora l'area della regione compresa tra Φ e l'intero asse x: integriamo nell'intervallo illimitato $[0, +\infty[$, ricordando che $f(x)$ è pari.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{8}{4+x^2}\,dx =$$
$$= 2\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{8}{4+t^2}\,dt = 2\lim_{x\to+\infty}\left[4\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right]_0^x =$$
$$= 2\cdot 4\cdot\frac{\pi}{2} = 4\pi$$

4. Prendiamo $\overline{x}$ tale che $0 \le \overline{x} \le 2$ e consideriamo il cilindro la cui base è centrata in O e ha raggio $\overline{x}$, e la cui altezza è $f(\overline{x})$.



La superficie laterale del cilindro è data da $S(\overline{x}) = 2\pi\overline{x}f(\overline{x})$.

Per ottenere il volume di W basta dunque integrare $S(x)$ da 0 a 2:

$$V_W = 2\pi \int_0^2 xf(x)\,dx = 2\pi \int_0^2 \frac{8x}{4+x^2}\,dx.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 1
CORSO DI ORDINAMENTO 2013

L'area di un triangolo è data dal semiprodotto delle misure di due lati per il seno dell'angolo tra essi compreso. Possiamo invertire la formula per ricavare il seno dell'angolo compreso tra i due lati noti:

$$\text{sen}\alpha = \frac{2A}{ab} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3} = 1.$$

Dunque l'angolo compreso tra i due lati è retto e il triangolo è rettangolo. Possiamo quindi ricavare la misura del terzo lato con il teorema di Pitagora:

$$c = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

In alternativa, si può ottenere la stessa soluzione ricorrendo alla formula di Erone:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

detta A l'area del triangolo, p il suo semiperimetro e a, b e c i tre lati. Detto $c = x$ il lato incognito, sostituiamo i dati nella formula e otteniamo:

$$3 = \sqrt{\left(\frac{5+x}{2}\right)\left(\frac{5+x}{2} - 2\right)\left(\frac{5+x}{2} - 3\right)\left(\frac{5+x}{2} - x\right)}$$

$$3 = \sqrt{\left(\frac{5+x}{2}\right)\left(\frac{1+x}{2}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)\left(\frac{5-x}{2}\right)}$$

$$9 = \left(\frac{25-x^2}{4}\right)\left(\frac{x^2-1}{4}\right)$$

$$x^4 - 26x^2 + 169 = 0$$

$$(x^2 - 13)^2 = 0$$

che porta all'unica soluzione accettabile $x = \sqrt{13}$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 2
CORSO DI ORDINAMENTO 2013

Studiamo le condizioni di esistenza per la funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}.$$

Dobbiamo determinare per quali valori

$$1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}} \geq 0,$$

il che presuppone di trovare i valori per cui $2 - \sqrt{3-x} \geq 0$. Dobbiamo studiare quindi le condizioni di esistenza della radice presente in questa espressione, cioè stabilire quando $3 - x \geq 0$. Otteniamo $x \leq 3$.
Cerchiamo ora i valori per cui $2 - \sqrt{3-x} \geq 0$, che sono i valori di x per cui $3 - x \leq 4$, cioè $x \geq -1$. Il campo di esistenza è pertanto $-1 \leq x \leq 3$.
Studiamo ora i valori per cui $1 - \sqrt{2 - \sqrt{3-x}} \geq 0$, cioè

$$\sqrt{2 - \sqrt{3-x}} \leq 1$$

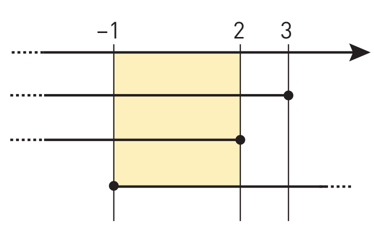
$$2 - \sqrt{3-x} \leq 1$$

$$\sqrt{3-x} \geq 1$$

$$3 - x \geq 1$$

che porta a $x \leq 2$.

Il dominio della funzione si ricava intersecando tutte le condizioni trovate, ed è quindi $-1 \leq x \leq 2$.



SOLUZIONE DEL QUESITO 3
CORSO DI ORDINAMENTO 2013

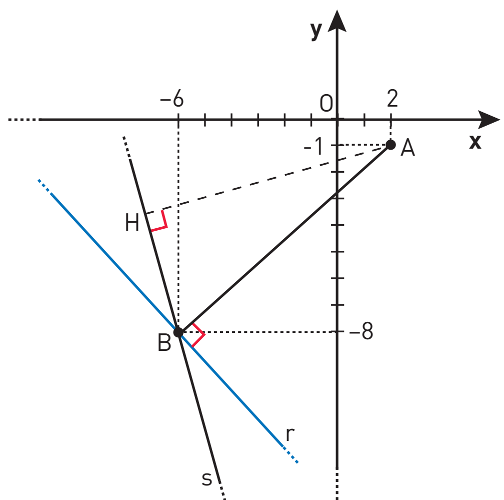
Dati i punti $A(2; -1)$ e $B(-6; -8)$ in un sistema cartesiano ortogonale, tracciamo il segmento AB. Determiniamo poi la retta r passante per B e perpendicolare ad AB:

$$y - y_B = -\frac{1}{\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}(x - x_B)$$

cioè

$$y + 8 = -\frac{1}{\frac{-8+1}{-6-2}}(x + 6)$$

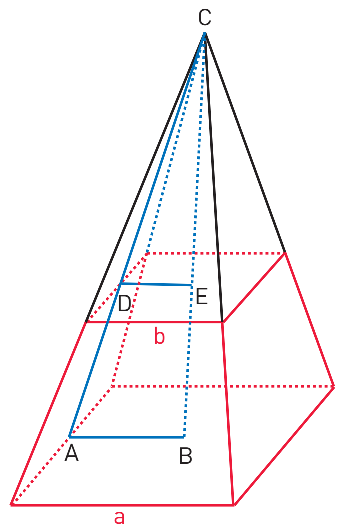
da cui $y = -\dfrac{8}{7}x - \dfrac{104}{7}$ o, equivalentemente, $8x + 7y + 104 = 0$.
Tracciamo ora una generica retta s passante per B, distinta da r, e consideriamo la distanza AH, dove H è la proiezione ortogonale di A su s. Il triangolo ABH è rettangolo, con ipotenusa AB e cateto AH. Poiché $AB > AH$, allora AB è la distanza massima tra A e le rette passanti per B.



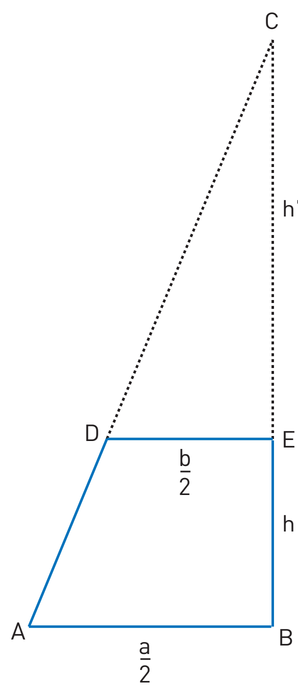
Si può quindi concludere che la retta per B avente massima distanza da A è la retta r.

SOLUZIONE DEL QUESITO 4
CORSO DI ORDINAMENTO 2013

Sia T il tronco di piramide retta quadrata, di altezza h e lati di base a e b.



Consideriamo la sezione indicata nella figura sottostante.



I triangoli ABC e CDE sono simili perché rettangoli e con un angolo in comune. Dunque, considerando la notazione utilizzata nella figura, $\frac{a}{2} : \frac{b}{2} = (h + h') : h'$ e quindi

$$\frac{a}{2}h' = \frac{b}{2}h + \frac{b}{2}h'$$

$$h' = \frac{\frac{b}{2}h}{\frac{a-b}{2}} = \frac{bh}{a-b}.$$

Calcoliamo il volume della piramide P da cui il tronco è stato tagliato.

$$V_P = \frac{a^2(h+h')}{3} = \frac{a^2\left(h+\frac{bh}{a-b}\right)}{3} = \frac{a^2\frac{ah}{a-b}}{3} = \frac{a^3h}{3(a-b)}.$$

Calcoliamo il volume della piramide P' di altezza h', ottenuta sottraendo da P il tronco T:

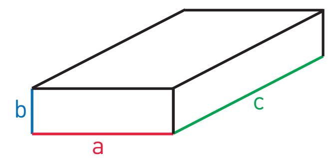
$$V_{P'} = \frac{b^2h'}{3} = \frac{b^3h}{3(a-b)}$$

quindi il volume del tronco T si ricava facendo:

$$V_T = V_P - V_{P'} = \frac{h(a^3-b^3)}{3(a-b)} = \frac{h(a-b)(a^2+ab+b^2)}{3(a-b)} = \frac{h(a^2+ab+b^2)}{3}.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 5
CORSO DI ORDINAMENTO 2013

Schematizziamo la valigia come un parallelepipedo, come in figura.
In questo modo, possiamo esprimere il suo volume come $V = abc$.



Se le dimensioni aumentano del 10% i lati variano diventando $a_{10\%} = \frac{11}{10}a$, $b_{10\%} = \frac{11}{10}b$, $c_{10\%} = \frac{11}{10}c$ perché un aumento del 10% corrisponde a $1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10}$; il volume diventa quindi

$$V_{10\%} = a_{10\%}b_{10\%}c_{10\%} = \frac{1331}{1000}abc = \frac{1331}{1000}V = 133,1\%V.$$

Il volume quindi aumenta del 33,1%.
Se le dimensioni aumentano del 20% i lati variano diventando $a_{20\%} = \frac{6}{5}a$, $b_{20\%} = \frac{6}{5}b$, $c_{20\%} = \frac{6}{5}c$ perché un aumento del 20% corrisponde a $1 + \frac{20}{100} = \frac{6}{5}$; il volume diventa quindi

$$V_2 = \frac{216}{125}V = \frac{1728}{1000}V = 172,8\%V.$$

Il volume aumenta quindi del 72,8%.
Se le dimensioni aumentano del 25% i lati diventano $a_{25\%} = \frac{5}{4}a$, $b_{25\%} = \frac{5}{4}b$, $c_{25\%} = \frac{5}{4}c$ perché un aumento del 25% corrisponde a $1 + \frac{25}{100} = \frac{5}{4}$; il volume diventa quindi

$$V_{25\%} = \frac{125}{64}V = \frac{195,3125}{100}V \simeq 195\%V.$$

Il volume aumenta quindi circa del 95%.

SOLUZIONE DEL QUESITO 6
CORSO DI ORDINAMENTO 2013

Disponendo in ordine crescente i 5040 numeri che si possono formare come indicato nel quesito, è facile determinare quali saranno i primi 6 della lista (cioè i primi 3! – questa considerazione ci sarà utile in seguito):

$$1\,234\,567$$

$$1\,234\,576$$

$$1\,234\,657$$

$$1\,234\,675$$

$$1\,234\,756$$

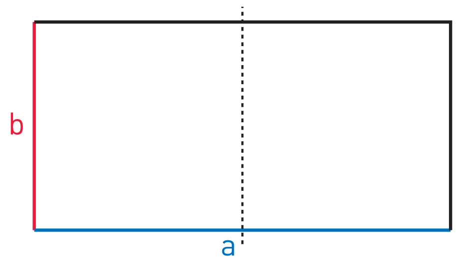
$$1\,234\,765$$

In tutti questi numeri le prime quattro cifre sono uguali a 1 234, mentre le rimanenti tre sono date da una permutazione di $\{5, 6, 7\}$. Il numero immediatamente successivo nella lista, cioè il settimo, sarà il più piccolo tra i numeri in cui la quarta cifra viene incrementata di uno: si tratta di 1 235 467.

Per rispondere alla seconda domanda, osserviamo che 721 equivale a $720 + 1 = 6! + 1$ e ragioniamo in modo simile a quanto appena visto. I primi 6! numeri saranno quelli la cui prima cifra è 1, mentre le rimanenti sei sono date da una permutazione di $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Il numero immediatamente successivo nella lista, cioè il 721-esimo, sarà il più piccolo tra i numeri in cui la prima cifra viene incrementata di uno: si tratta di 2 134 567.

SOLUZIONE DEL QUESITO 7
CORSO DI ORDINAMENTO 2013

La misura dell'area del foglio di partenza è $A = 1 = ab$ secondo la notazione della figura:



Se i nuovi rettangoli ottenuti ritagliando il foglio a metà sono simili, $a : b = b : \frac{a}{2}$ che equivale a $\frac{a^2}{2} = b^2$. Mettiamo questa identità a sistema con $ab = 1$:

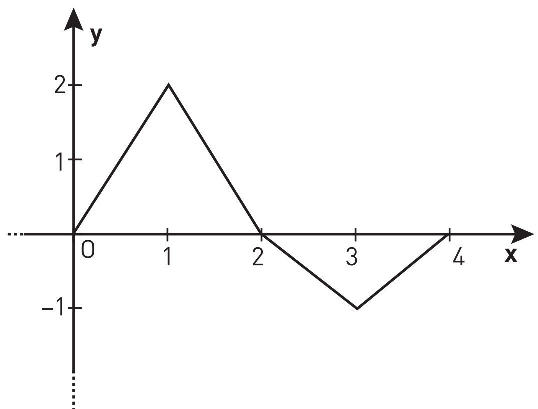
$$\begin{cases} a^2 - 2b^2 = 0 \\ ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 2b^2 \\ ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2}b \\ \sqrt{2}b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2}b \\ b^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}} \\ b = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{cases}$$

quindi le misure dei lati sono:

$$\begin{cases} a = \sqrt[4]{2} \\ b = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{cases}.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 8
CORSO DI ORDINAMENTO 2013

Consideriamo la funzione $g(x) = \int_0^x f(t)\ dt$. Poiché $f(x)$ è continua per $x > 0$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale la derivata della funzione integrale $g(x)$ esiste e vale $g'(x) = f(x)$.



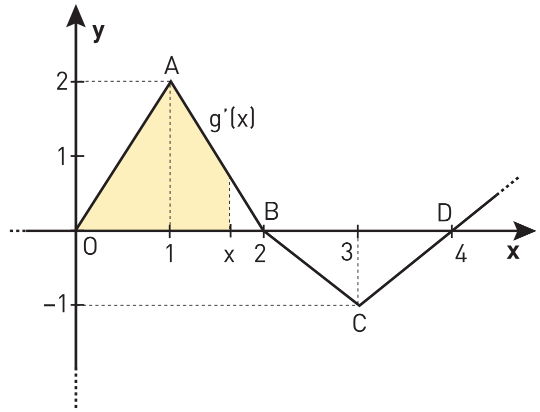
Osservando il grafico in figura, si ricava che:

- per $x = 0 \vee x = 2 \vee x = 4$, $g'(x) = 0$;
- per $0 < x < 2 \vee x > 4$, $g'(x) > 0$ e la funzione $g(x)$ è crescente;
- per $2 < x < 4$, $g'(x) < 0$ e la funzione $g(x)$ è decrescente.

Dunque, il valore di x positivo per cui g ha un minimo è $x = 4$.

In alternativa, si poteva osservare che $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ rappresenta la somma algebrica $S(x)$ delle aree sottese dal grafico, prese con i segni opportuni. Pertanto $S(x)$ è necessariamente minima per $x = 4$, quando all'area del triangolo OAB viene sottratta l'area del triangolo BCD:

$$\min g = \min S = S(4) = \frac{2 \cdot 2}{2} - \frac{2 \cdot 1}{2} = 1.$$


y
A
2
1
g'(x)
B
D
O
1
x
2
3
4
x
−1
C

SOLUZIONE DEL QUESITO 9
CORSO DI ORDINAMENTO 2013

Il limite

$$\lim_{x\to 0} 4 \cdot \frac{\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$$

si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Raccogliamo $-\operatorname{sen} x$ al numeratore e sfruttiamo il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$:

$$\lim_{x\to 0} 4 \cdot \frac{-\operatorname{sen} x(1-\cos x)}{x^2} = 4 \cdot 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 10
CORSO DI ORDINAMENTO 2013

Tra i quattro grafici proposti, solo quello in A potrebbe essere quello di $f'(x)$.

Infatti, osservando il grafico di $f(x)$ si può dedurre che:

- $f'(-2) = f'(2) = 0$, perché i punti $x = -2$ e $x = 2$ sono stazionari (rispettivamente un punto di massimo e un punto di minimo relativo), ovvero perché le tangenti nei punti $(-2; f(-2))$ e $(2; f(2))$ sono parallele all'asse x.
- $f'(0) < 0$, perché la retta tangente al grafico di $f(x)$ in $(0; 0)$ ha coefficiente angolare negativo. Ricordiamo infatti che il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel generico punto $(x_0; f(x_0))$ è uguale a $f'(x_0)$.

Da quanto detto conseguono, rispettivamente, le seguenti condizioni sul grafico di $f'(x)$:

- Il grafico di $f'(x)$ interseca l'asse x per $x = -2$ e $x = 2$.
- Il grafico di $f'(x)$ interseca l'asse y nel semiasse delle ordinate negative.

L'unico grafico che rispetta entrambe le condizioni è il grafico A.