SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
CORSO DI ORDINAMENTO 2014

1. Per determinare $f(0)$ e $f(k)$, applichiamo il teorema fondamentale del calcolo integrale, che si può applicare essendo f continua per ipotesi:

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt \Rightarrow g'(x) = f(x).$$

Per le ipotesi del problema, sappiamo che:

- $g'(0) = 0$, poiché il grafico di g è tangente all'asse x in 0;
- $g'(k) = 0$, perché g ha un massimo in $x = k$.

Quindi $f(0) = g'(0) = 0$ e $f(k) = g'(k) = 0$, cioè la funzione f interseca l'asse x in $x = 0$ e in $x = k$.
La funzione f è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[0, w]$, quindi per il teorema di Weierstrass ha massimo e minimo assoluti.
Per studiare nel dettaglio l'andamento di f e tracciarne un probabile grafico, procediamo con lo studio della funzione.
Dal grafico di g notiamo anche che:

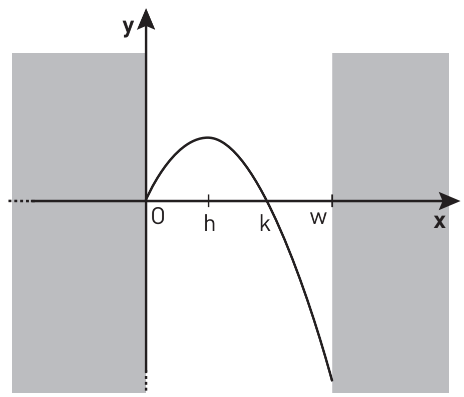
- $g'(x) > 0$ per $0 < x < k$, poiché g è crescente in questo intervallo;
- $g'(x) < 0$ per $k < x < w$, poiché g è decrescente in questo intervallo.

Siccome $f(x) = g'(x)$, scopriamo che $f(x)$ è positiva per $0 < x < k$ e negativa per $k < x < w$. In particolare, poiché f è definita anche negli estremi dell'intervallo, notiamo anche che $f(w) < 0$.
Passiamo allo studio della derivata prima: $f'(x) = g''(x)$, che è uguale a 0 per $x = h$ perché g presenta un flesso in quel punto per ipotesi. Quindi $x = h$ è un punto stazionario per f, ma per scoprire se è l'unico e se è un punto di massimo o minimo, dobbiamo studiare il segno di f'.
Dal grafico di g si evince che:

- $g''(x) > 0$ per $0 < x < h$, perchè la concavità di g in questo intervallo è rivolta verso l'alto;

- $g''(x) < 0$ per $h < x < w$, perchè la concavità di g in questo intervallo è rivolta verso il basso.

Poiché $f'(x) = g''(x)$, f è crescente per $0 < x < h$ e decrescente per $h < x < w$. Nel punto stazionario $x = h$ abbiamo quindi necessariamente un massimo di f, che è unico, mentre il minimo assoluto è in $x = 0$ oppure in $x = w$. Poiché $f(0) = 0$ e $f(w) < 0$, concludiamo che il minimo assoluto è in w.
Tracciamo un grafico indicativo di f in base alle informazioni raccolte.



2. Sapendo che la funzione $g(x)$ è polinomiale di terzo grado, possiamo esprimerla generalmente nella forma

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad \text{con } a \neq 0.$$

La sua derivata prima in questo caso è dunque

$$g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Dal grafico di g e per le ipotesi del problema, avevamo che $g(0) = 0$ e $g'(0) = 0$, quindi sostituendo $x = 0$ in entrambe le scritture, otteniamo che:

$$g(0) = d = 0 \qquad \text{e} \qquad g'(0) = c = 0.$$

Possiamo sostituire questi due valori nelle forme generali di g e g':

$$g(x) = ax^3 + bx^2,$$

$$g'(x) = 3ax^2 + 2bx.$$

Calcoliamo anche la derivata seconda di g:

$$g''(x) = 6ax + 2b.$$

Dalle ipotesi del problema sappiamo che $g(w) = 0$, $g'(k) = 0$ e $g''(h) = 0$, quindi sostituendo i valori $x = w$, $x = k$ e $x = h$ nelle espressioni di g, g' e g'', otteniamo:

$$\begin{cases} g(w) = aw^3 + bw^2 = 0 \Rightarrow w^2(aw + b) = 0 \Rightarrow aw + b = 0 \Rightarrow w = -\dfrac{b}{a} \\ g'(k) = 3ak^2 + 2bk = 0 \Rightarrow k(3ak + 2b) = 0 \Rightarrow 3ak + 2b = 0 \Rightarrow k = -\dfrac{2b}{3a} \\ g''(h) = 6ah + 2b \Rightarrow h = -\dfrac{b}{3a} \end{cases}$$

(poichè $w \neq 0$, $k \neq 0$ e $h \neq 0$). Ponendo $l = -\dfrac{b}{a}$, notiamo subito che:

$$h = \frac{1}{3}l, \qquad k = \frac{2}{3}l, \qquad w = l,$$

cioè i numeri h e k dividono l'intervallo $[0, w]$ in tre parti uguali.

3. Sostituiamo $w = 3$ nella formula generica di g trovata al punto precedente $g(x) = ax^3 + bx^2$, ricordando che $g(w) = 0$, e mettiamola a sistema con l'altra condizione $g(1) = \frac{2}{3}$.

$$\begin{cases} g(3) = 3^3a + 3^2b = 0 \\ g(1) = a + b = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27a + 9b = 0 \\ a + b = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3a \\ a - 3a = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -3a \\ -2a = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3a \\ a = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Quindi l'espressione di g ricercata è $g(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2$.

Partiamo da questa espressione per ricercare le equazioni delle rette normali al grafico Γ di g nei punti di intersezione con la retta $y = \dfrac{2}{3}$.

Per calcolare le ascisse delle tangenti, poniamo a sistema l'equazione di g e della retta:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 \\ y = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 \\ y = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \\ y = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Per risolvere la prima equazione, proviamo a scomporre il polinomio usando la regola di Ruffini. Poniamo $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ e cerchiamo tra i divisori del termine noto $\{1, -1, 2, -2\}$, i valori di x che annullano il polinomio.

$$P(1) = 1 - 3 + 2 = 0,$$

quindi il polinomio è divisibile per $x - 1$. Dallo schema

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & // \end{array}$$

otteniamo $(x^3 - 3x^2 + 2) = (x - 1)(x^2 - 2x - 2) = 0$, che implica $x = 1$ oppure $x^2 - 2x - 2 = 0$. Troviamo le radici di quest'ultima equazione:

$$\frac{\Delta}{4} = 1 + 2 = 3 \Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Di esse solo $1 + \sqrt{3}$ è accettabile in quanto $1 - \sqrt{3} < 0$ non è compresa nel dominio della funzione. La retta $y = \frac{2}{3}$ interseca il grafico della funzione g nei due punti:

$$P_1 = \left(1, \frac{2}{3}\right) \qquad \text{e} \qquad P_2 = \left(1 + \sqrt{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Calcoliamo i coefficienti angolari m_1 e m_2 delle rette tangenti a g in P_1 e P_2, che sono uguali ai valori della derivata di g calcolati nelle ascisse di P_1 e P_2.

$$g'(x) = -x^2 + 2x \Rightarrow \begin{cases} m_1 = g'(1) = 1 \\ m_2 = g'(1 + \sqrt{3}) = -2 \end{cases}$$

I coefficienti angolari n_1 e n_2 delle rette perpendicolari al grafico di g in P_1 e P_2 si ottengono ricordando che vale $n = -\frac{1}{m}$. Quindi $n_1 = -1$, $n_2 = \frac{1}{2}$.
L'equazione di un fascio di rette di centro (x_0, y_0) è

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

quindi le due rette normali al grafico di g passanti per P_1 e P_2 hanno equazioni

$$y - \frac{2}{3} = -(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = -x + \frac{5}{3},$$

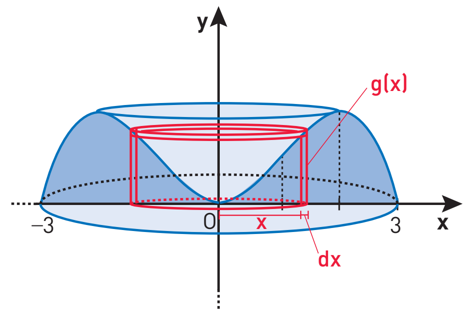
$$y - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}\left(x - (1 + \sqrt{3})\right) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. Suddividiamo il solido W in cilindri cavi di spessore dx. Ciascuno di essi ha come base una corona circolare di raggio x e spessore dx, quindi il suo volume è pari a

$$V(x) = base \cdot altezza = (2\pi x \cdot dx) \cdot g(x).$$

Il volume di W si ottiene quindi sommando questi cilindri:

$$V(W) = \int_0^3 V(x) = W = \int_0^3 (2\pi x) g(x) dx,$$



da cui

$$\begin{aligned} V(W) &= \int_0^3 (2\pi x)\left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right) dx = 2\pi \int_0^3 \left(-\frac{1}{3}x^4 + x^3\right) dx = 2\pi \left[-\frac{x^5}{15} + \frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \\ &= 2\pi\left(-\frac{81}{5} + \frac{81}{4}\right) = \frac{81}{10}\pi. \end{aligned}$$

Se il sistema monometrico Oxy ha unità di misura fissata in decimetri, notiamo che il solito W ha volume pari a $\frac{81}{10}\pi \simeq 25,45$ in dm^3, pari a $25,45$ litri.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
CORSO DI ORDINAMENTO 2014

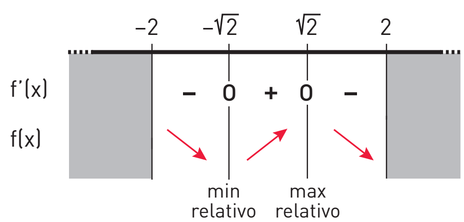
1. Per calcolare massimi e minimi assoluti della funzione $f(x)$, ne calcoliamo la derivata $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \sqrt{4-x^2} + x\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} \end{aligned}$$

La derivata esiste per $x \in]-2;2[$. Studiamo il segno della derivata.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} > 0 \\ 4-2x^2 &> 0 \\ x^2-2 &< 0 \\ -\sqrt{2} &< x \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

La derivata ha segno positivo (e f è crescente) per $x \in]-\sqrt{2};\sqrt{2}[$ e ha segno negativo (e f è decrescente) per $x \in]-2;-\sqrt{2}[\,\cup\,]\sqrt{2};2[$, come si vede dal quadro dei segni di $f'(x)$:



Poiché agli estremi del dominio $f(-2) = f(2) = 0$, risulta:

$x = -\sqrt{2}$ è un punto di minimo assoluto, con $f(-\sqrt{2}) = -2$;

$x = \sqrt{2}$ è un punto di massimo assoluto, con $f(\sqrt{2}) = 2$.

2. L'origine O è centro di simmetria per il grafico Γ della funzione se $f(x)$ è dispari, cioè se $f(-x) = -f(x)$.

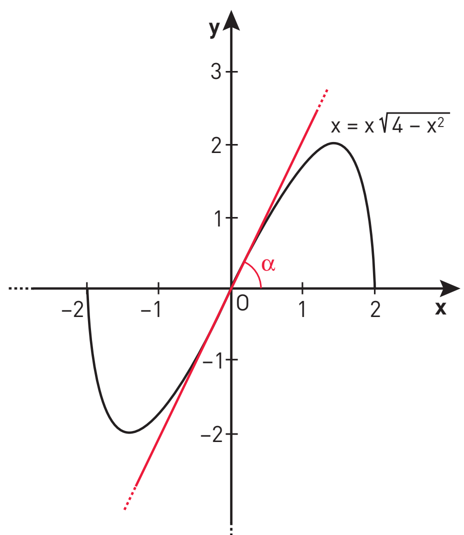
$$f(-x) = (-x)\sqrt{4 - (-x)^2)} = -x\sqrt{4 - x^2} = -f(x)$$

La funzione f è dispari, per cui possiamo dire che O è centro di simmetria per Γ.

Calcoliamo il valore della derivata prima di f in $x = 0$ per trovare l'angolo α che la tangente in O a Γ forma con l'asse delle x:

$$f'(0) = \frac{4 - 0}{\sqrt{4 - 0}} = \frac{4}{\sqrt{4}} = 2 = \text{tg } \alpha,$$

quindi $\alpha = \text{arctg } 2 \simeq 63°26'$



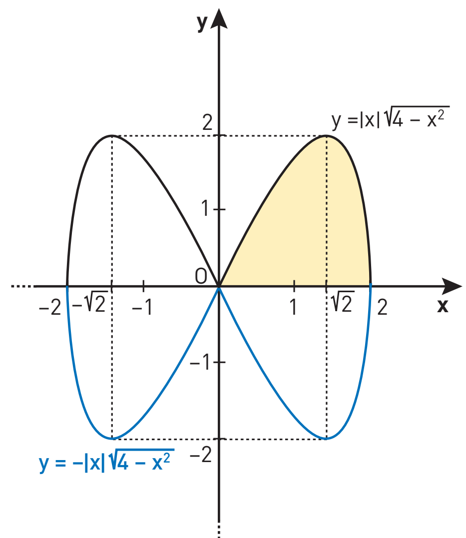
3. La curva $y^2 = x^2(4 - x^2)$ è definita per valori di x che rendono $x^2(4 - x^2) \geq 0$, poiché y^2 assume sempre valori positivi:

$$x^2(4 - x^2) \geq 0$$
$$4 - x^2 \geq 0$$
$$-2 \leq x \leq 2$$

Quindi le condizioni di esistenza della curva sono $x \in [-2; 2]$.
Scriviamo la curva come funzione di x, il grafico della curva è composto dal grafico di due funzioni:

$$g_1(x) = |x|\sqrt{4 - x^2} \quad \text{e} \quad g_2(x) = -|x|\sqrt{4 - x^2}.$$

Osserviamo che l'unione dei grafici di g_1 e g_2 è congruente all'unione del grafico Γ e del suo simmetrico rispetto all'asse x.



Il grafico della curva $y^2 = x^2(4 - x^2)$ è composto da quattro parti congruenti: per calcolarne l'area racchiusa basta calcolare l'area racchiusa da una delle quattro parti e poi moltiplicare per quattro il valore ottenuto.

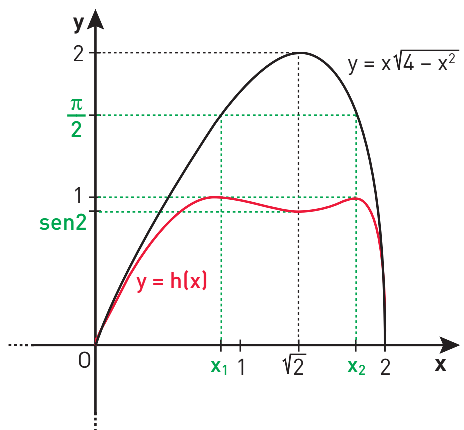
$$\mathcal{A} = 4 \cdot \int_0^2 x\sqrt{4 - x^2}\, dx$$

Riconduciamo l'integrale alla forma $\int_0^2 t'(x) \cdot \sqrt{t(x)}\, dx$ moltiplicando e dividendo per -2:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{4}{-2} \cdot \int_0^2 -2x\sqrt{4 - x^2}\, dx = \\
&= -2\left[\frac{(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \\
&= -2 \cdot \frac{2}{3}\left[(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \\
&= -\frac{4}{3}(0 - 4^{\frac{3}{2}}) = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{64} = \frac{32}{3}.
\end{aligned}$$

4. Consideriamo la funzione $h(x) = \operatorname{sen}(f(x))$, con $0 \leq x \leq 2$.
Studiamo l'andamento di h confrontandolo con quello di f nell'intervallo $[0; 2]$.

Dallo studio di f, sappiamo che, per $0 \leq x \leq 2$, f assume valori compresi tra 0 e 2, in particolare assume il valore $\frac{\pi}{2}$ due volte, nei punti x_1, x_2. In tali punti si ha $h(x_1) = h(x_2) = 1$. Inoltre $h(0) = h(2) = \operatorname{sen} 0 = 0$.
Per $0 < x < x_1$, la funzione f cresce da 0 a $\frac{\pi}{2}$, quindi h cresce da 0 a 1 nello stesso intervallo. Analogamente, h decresce da 1 a 0 nell'intervallo $x_2 < x < 2$.
Nell'intervallo $x_1 < x < \sqrt{2}$, la funzione f cresce da $\frac{\pi}{2}$ a 2, quindi h decresce da 1 a sen 2. Nell'intervallo $\sqrt{2} < x < x_2$ f decresce da 2 a $\frac{\pi}{2}$, quindi h cresce da sen 2 a 1.



Osservando il grafico, possiamo vedere che la funzione h ha:

- due massimi assoluti nei punti $x = x_1 \in]0; \sqrt{2}[$, $x = x_2 \in]\sqrt{2}; 2[$, con $h(x_1) = h(x_2) = 1$;
- due minimi assoluti nei punti $x = 0$, $x = 2$, con $h(0) = h(2) = 0$;
- un minimo relativo nel punto $x = \sqrt{2}$, con $h(\sqrt{2}) = \operatorname{sen} 2$.

I valori di k per cui l'equazione $h(x) = k$ ha quattro soluzioni distinte sono quelli per cui la retta $y = k$ incontra il grafico di h in quattro punti distinti, quindi per $k \in]\operatorname{sen} 2; 1[$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 1
CORSO DI ORDINAMENTO 2014

Il teorema dei seni afferma che in un triangolo le misure dei lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti. Applicando questo teorema al triangolo in figura, otteniamo che

$$\frac{3}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{4}{\operatorname{sen} \alpha}$$

da cui si ricava

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{3} \cdot \operatorname{sen} 30° = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

Utilizzando la calcolatrice, calcoliamo la misura dell'angolo α:

$$\alpha = \operatorname{arcsen} \frac{2}{3} \simeq 41,8103149° \simeq 41°49'$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 2
CORSO DI ORDINAMENTO 2014

Un poliedro si dice regolare quando le sue facce sono poligoni regolari congruenti e i suoi angoloidi sono congruenti. Pertanto gli angoli delle facce di ogni suo angoloide devono essere angoli di poligoni regolari e devono essere almeno tre. Inoltre, per un noto teorema di geometria solida, in ogni angoloide la somma degli angoli delle facce è minore strettamente di 360°. Se le facce del poligono regolare sono esagoni regolari, l'angolo di ogni faccia è di 120°, quindi non si possono avere poliedri le cui facce siano esagoni perché la somma degli angoli di tre facce è 360°, il che è impossibile.

SOLUZIONE DEL QUESITO 3
CORSO DI ORDINAMENTO 2014

Osserviamo che:

$$-1080\,a^4\,b^9 = -10 \cdot 4a^4 \cdot 27b^9 = \left(2a^2\right)^2 \cdot \left(-3b^3\right)^3 \cdot 10.$$

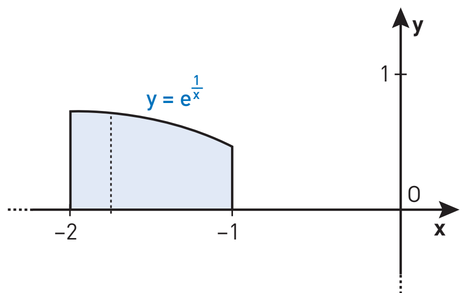
Quindi, siccome $2+3=5$, tale termine dovrà comparire nello sviluppo di una quinta potenza di $(2a^2-3b^3)$.

In effetti notiamo, dal triangolo di Tartaglia, che $(x+y)^5$ contiene il termine $10 \cdot x^2y^3$.

Quindi il valore di n cercato è 5.

SOLUZIONE DEL QUESITO 4
CORSO DI ORDINAMENTO 2014

Nella figura è riportata la regione R di piano compresa tra il grafico di $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ e l'asse x, con $-2 \leq x \leq -1$.



Il solido Ω con base R ha come sezioni perpendicolari all'asse x rettangoli con altezza definita dalla funzione $h(x) = \frac{1}{x^2}$. Il volume V del solido Ω può quindi essere visto come la somma integrale di parallelepipedi la cui area di base è $e^{\frac{1}{x}}dx$ e l'altezza è $\frac{1}{x^2}$:

$$V = \int_{-2}^{-1} e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} dx.$$

Risolviamo l'integrale:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^{-1} e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} dx = -\int_{-2}^{-1} e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \\ &= -\left[e^{\frac{1}{x}}\right]_{-2}^{-1} = -\left(e^{-1} - e^{-\frac{1}{2}}\right) = \\ &= e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 5
CORSO DI ORDINAMENTO 2014

La risposta al quesito è 1600.

Vediamo come è possibile ottenere tale risultato con due metodi differenti.

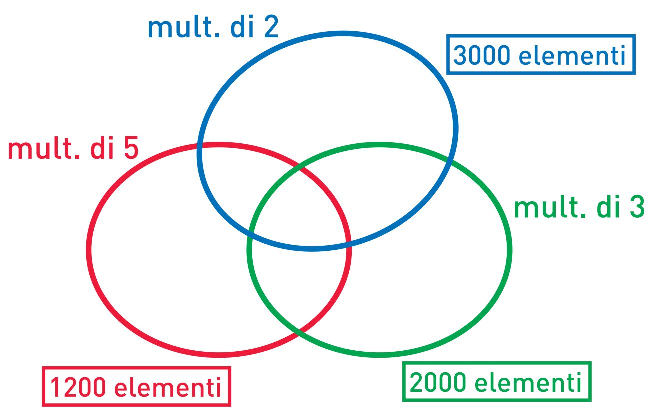
Primo metodo

Per determinare i numeri non divisibili per i numeri 2, 3 e 5, sottraiamo a 6000 il numero dei multipli di 2, 3 o 5.

I multipli di 2 nell'intervallo richiesto sono $6000 : 2 = 3000$.

I multipli di 3 sono $6000 : 3 = 2000$.

I multipli di 5 sono $6000 : 5 = 1200$.



Sarebbe un errore contare il numero dei multipli di 2, 3 o 5 semplicemente sommando i tre risultati trovati, in quanto conteremmo più volte i multipli comuni (ad esempio il numero 6 è stato contato sia tra i multipli di 2 sia tra quelli di 3). Tra l'altro otterremmo un risultato assurdo poiché la somma $3000 + 2000 + 1200 = 6200$ è maggiore di 6000.

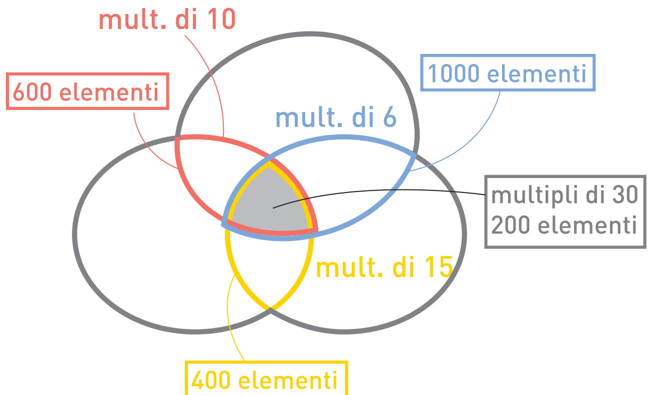
Dobbiamo quindi contare il numero dei multipli comuni per sottrarli a 6200. Osserviamo che i numeri 2, 3 e 5 sono primi tra loro, quindi i multipli comuni di due di essi sono i multipli del loro prodotto.

I multipli comuni di 2 e di 3 sono i multipli di 6 che nell'intervallo richiesto sono $6000 : 6 = 1000$.

I multipli di 10 sono $6000 : 10 = 600$.

I multipli di 15 sono $6000 : 15 = 400$.

I multipli di 30 sono $6000 : 30 = 200$.



Siamo pronti ora a calcolare il totale dei multipli di 2, 3 o 5 sottraendo a 6200 i multipli di 6, i multipli di 10 e di 15, aggiungendo poi l'intersezione formata dai multipli di 30 che altrimenti non verrebbe più contata.

$6200 - 1000 - 600 - 400 + 200 = 4400.$

Ne segue, quindi, che la risposta al quesito è $6000 - 4400 = 1600$.

Secondo metodo

Osserviamo che ogni 30 numeri la divisibilità per 2, 3, 5 si ripete, ovvero a è divisibile per 2, 3 o 5 se e solo se $a + 30$ è divisibile per 2, 3 o 5.

Quindi ci basta contare quanti numeri non sono divisibili per 2, 3, 5 tra 1 e 30, e poi moltiplicare per quanti intervalli di numeri tra 1 e 30 stiamo considerando.

È molto facile verificare che i numeri tra 1 e 30 non divisibili per 2, 3 o 5 sono:

$$1 \quad 7 \quad 11 \quad 13 \quad 17 \quad 19 \quad 23 \quad 29$$

in totale sono 8.

Tra 1 e 6000 stiamo considerando 200 intervalli, quindi la risposta finale è:

$$8 \cdot 200 = 1600.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 6
CORSO DI ORDINAMENTO 2014

Consideriamo il parallelepipedo di altezza h che ha per base un quadrato di lato l.
Il volume V di questo solido risulta

$$V = l^2 \cdot h \to l^2 \cdot h = 5 \text{ L } = 5 \text{ dm}^3$$

cioè, omettendo l'unità di misura dm^3,

$$l^2 \cdot h = 5$$

La superficie totale S del solido è:

$$S = 2l^2 + 4l \cdot h.$$

Poniamo a sistema questa relazione con quella trovata in precedenza:

$$\begin{cases} l^2 \cdot h = 5 \\ S = 2l^2 + 4l \cdot h \end{cases} \qquad \begin{cases} h = \dfrac{5}{l^2} \\ S = 2l^2 + 4l \cdot \dfrac{5}{l^2} \end{cases}$$

da cui si ricava $S = \dfrac{2l^3 + 20}{l}$.
Consideriamo la funzione corrispondente

$$y = \frac{2x^3 + 20}{x} \text{ con } x > 0.$$

Calcoliamo la sua derivata:

$$y' = \frac{6x^2 \cdot x - (2x^3 + 20)}{x^2} \to y' = \frac{4x^3 - 20}{x^2}.$$

Studiamo il suo segno nell'intervallo $]0; \infty[$:

$$y' > 0 \Leftrightarrow x^3 > 5 \to x > \sqrt[3]{5}$$

La funzione è:

- crescente per $x > \sqrt[3]{5}$;
- decrescente per $0 < x < \sqrt[3]{5}$;

- ha minimo per $x = \sqrt[3]{5} \approx 1,71$.

Le dimensioni della lattina, arrotondate ai dm, sono quindi:

$$l = \sqrt[3]{5} \text{ dm}$$

$$h = \frac{5 \text{ dm}}{l^2} = \frac{5 \text{ dm}^3}{(\sqrt[3]{5})^2 \text{ dm}^2} = \sqrt[3]{5} \text{ dm}.$$

Si conclude che il parallelepipedo che soddisfa la richiesta è un cubo di lato

$$l = \sqrt[3]{5} \text{ dm} \approx 1,71 \text{ dm} = 171 \text{ mm}.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 7
CORSO DI ORDINAMENTO 2014

Data una $f(x)$ continua in un intervallo $[a;b]$, il suo valore medio integrale è

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Sotto la condizione $k>0$ risulta:

$$\frac{1}{k-0}\int_0^k x^3dx = 9 \to \frac{1}{k}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^k = 9 \to \frac{1}{k}\cdot\frac{k^4}{4} = 9 \to k^3 = 36 \to k = \sqrt[3]{36}$$

che è una soluzione accettabile.
Si potrebbe anche intendere il valor medio del teorema di Lagrange; il teorema è applicabile alla funzione $f(x) = x^3$, che è funzione polinomiale e quindi derivabile in $\mathbb{R}$. Risulta quindi, con $k>0$,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \text{ con } c \in]a;b[$$

cioè, applicandola al nostro caso

$$\frac{f(k)-f(0)}{k-0} = 9 \to \frac{k^3-0}{k-0} = 9 \to k^2 = 9$$

cioè $k=\pm 3$. L'unica soluzione accettabile è $k=3$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 8
CORSO ORDINAMENTO 2014

Il generico polinomio di quarto grado è del tipo

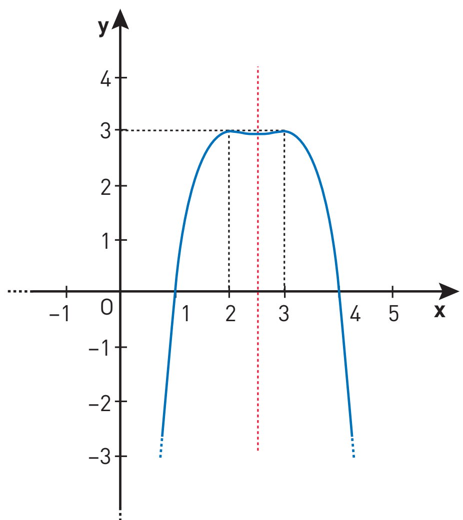
$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

e la sua derivata prima è

$$P'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d.$$

Sappiamo che la funzione $P(x)$ assume il suo valore massimo 3 per $x = 2$ e $x = 3$: ciò significa che $P'(2) = P'(3) = 0$ e che $P(2) = P(3) = 3$. Inoltre, sappiamo che $P(1) = 0$.

Le condizioni proposte rendono il grafico della curva simmetrico rispetto alla retta $x = \frac{5}{2}$, per cui, se $P(1) = 0$, allora anche $P(4) = 0$, essendo il punto $(1; 0)$ simmetrico di $(4; 0)$ rispetto alla retta $x = \frac{5}{2}$.



Si poteva anche ragionare nel seguente modo. I coefficienti del polinomio sono le soluzioni del sistema lineare:

$$\begin{cases} 32a + 12b + 4c + d = 0 \\ 108a + 27b + 6c + d = 0 \\ 16a + 8b + 4c + 2d + e = 3 \\ 81a + 27b + 9c + 3d + e = 3 \\ a + b + c + d + e = 0 \end{cases}$$

che, risolto, conduce alle soluzioni $a = -\frac{3}{4}$, $b = \frac{15}{2}$, $c = -\frac{111}{4}$, $d = 45$, $e = -24$.

Dunque

$$P(x) = -\frac{3}{4}x^4 + \frac{15}{2}x^3 - \frac{111}{4}x^2 + 45x - 24,$$

e quindi

$$P(4) = -\frac{3}{4} \cdot 4^4 + \frac{15}{2} \cdot 4^3 - \frac{111}{4} \cdot 4^2 + 45 \cdot 4 - 24 = 0.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 9
CORSO DI ORDINAMENTO 2014

Consideriamo la funzione irrazionale $f(x) = \sqrt{3 - \log_2(x+5)}$. Stabiliamo la condizione di realtà della radice quadrata e dell'argomento del logaritmo:

$$\begin{cases} 3 - \log_2(x+5) \geq 0 \\ x+5 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2(x+5) \leq 3 \\ x > -5 \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2(x+5) \leq \log_2(8) \\ x > -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x+5 \leq 8 \\ x > -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 3 \\ x > -5 \end{cases}$$

pertanto i valori accettabili sono $-5 < x \leq 3$. Il dominio della funzione data è pertanto

$$-5 < x \leq 3.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 10
CORSO DI ORDINAMENTO 2014

La funzione esponenziale è uguale a 1 quando l'esponente è uguale a 0 e la base è qualsiasi, oppure quando la base è uguale a 1 e l'esponente è qualsiasi.

Nel primo caso, i valori reali di x che soddisfano l'uguaglianza sono i valori che annullano l'esponente di $\left(\frac{1}{5}\left(x^2-10x+26\right)\right)^{x^2-6x+1}$, cioè le radici del polinomio di secondo grado x^2-6x+1:

$$x^2-6x+1=0.$$

Il discriminante è $\dfrac{\Delta}{4}=\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-ac=3^2-1=8$, quindi le due radici sono:

$$x_{1,2}=\frac{-\dfrac{b}{2}\pm\sqrt{\dfrac{\Delta}{4}}}{a}=3\pm\sqrt{8}=3\pm2\sqrt{2},$$

che sono i valori che stavamo cercando.
Dobbiamo però assicurarci che non esistano valori di x per i quali potremmo ottenere una forma non definita del tipo 0^0. A tale scopo, studiamo la base della funzione esponenziale: $\dfrac{1}{5}\left(x^2-10x+26\right)$.

$$\frac{1}{5}\left(x^2-10x+26\right)=0\Rightarrow x^2-10x+26=0.$$

Il discriminante è $\dfrac{\Delta}{4}=\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-ac=5^2-26=-1$, che è sempre negativo, quindi non esistono valori di x che annullano il polinomio $x^2-10x+26$. I valori di x trovati in precedenza sono dunque tutti ammissibili.
Nel secondo caso, dobbiamo trovare i valori di x per i quali la base della funzione esponenziale è uguale a 1.

$$\frac{1}{5}\left(x^2-10x+26\right)=1\Rightarrow x^2-10x+26=5\Rightarrow x^2-10x+21=0.$$

Il discriminante è $\dfrac{\Delta}{4}=\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-ac=5^2-21=4$, quindi le radici del polinomio sono:

$$x_{1,2}=\frac{-\dfrac{b}{2}\pm\sqrt{\dfrac{\Delta}{4}}}{a}=5\pm\sqrt{4}=5\pm2\Rightarrow x_1=3,x_2=7.$$

Entrambi i valori sono ammissibili poiché, se sostituiti all'equazione iniziale, non danno luogo alla forma indeterminata 1^∞.
In conclusione, l'insieme dei valori reali di x che verificano l'uguaglianza iniziale è $\left\{3 \pm 2\sqrt{2}, 3, 7\right\}$.

Una risoluzione alternativa del quesito parte dal passaggio iniziale di conversione dell'equazione esponenziale in un'equazione logaritmica:

$$\left(\frac{1}{5}\left(x^2 - 10x + 26\right)\right)^{x^2-6x+1} = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(x^2 - 6x + 1\right) \log\left(\frac{1}{5}\left(x^2 - 10x + 26\right)\right) = 0.$$

Con la legge di annullamento del prodotto si ottengono i valori reali di x che soddisfano l'uguaglianza.

