ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2003
Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

È assegnata la seguente equazione in x:

$x^3 + 2x - 50 = 0$, con $x \in \mathbb{R}$.

a) Dimostrare che ammette una e una sola soluzione $\overline{x}$.
b) Determinare il numero intero z tale che risulti: $z < \overline{x} < z + 1$.
c) Scrivere un algoritmo idoneo a calcolare un valore approssimato di $\overline{x}$ a meno di 10^{-4}.
d) Dopo aver riferito il piano a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare, se esistono, i valori del parametro reale k ($k \neq -1$) per cui la curva C_k di equazione:

$$y = (x^3 + 2x - 50) + k(x^3 + 2x - 75)$$

ammette un massimo e un minimo relativi.
e) Stabilire se esiste un valore $\overline{k}$ di k per cui la curva $C_{\overline{k}}$ è simmetrica rispetto all'origine O.

PROBLEMA 2

Un gruppo di persone è costituito da 3 uomini e dalle rispettive mogli. Ciascun uomo sceglie a caso una fra le 3 donne, con uguali possibilità di scelta, per un giro di ballo.
a) Calcolare quante sono le possibili terne di coppie di ballerini.
b) Calcolare la probabilità che:
1) nessun uomo balli con la propria moglie;
2) un solo uomo balli con la propria moglie;
3) tutti e tre gli uomini ballino con le rispettive mogli.

c) Il gioco viene effettuato per n volte. Calcolare:
1) per $n = 24$, il numero medio di volte in cui tutti e tre gli uomini ballano con le rispettive mogli;
2) per $n = 4$, la probabilità che non più di 2 volte capiti che nessun uomo balli con la propria moglie;
3) per $n = 60$, la probabilità che esattamente 30 volte capiti che un solo uomo balli con la propria moglie;
4) per $n = 15$, la probabilità che almeno 14 volte capiti che almeno un uomo balli con la propria moglie.

N.B.: Per l'uso che il candidato, se crede, ne può fare, si forniscono le formule della probabilità binomiale e della distribuzione normale:

$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},\ y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (e \simeq 2{,}7182,\ \pi \simeq 3{,}1415).$$

QUESTIONARIO

1 Nell'insieme delle rette dello spazio si consideri la relazione così definita: «due rette si dicono parallele se sono complanari e non hanno punti comuni». Dire se è vero o falso che gode della proprietà transitiva e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2 In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$8x^2+8y^2-4kx+8y-3k=0,$$

dove k è un parametro reale. Calcolare per quali valori di k il luogo è costituito da:

1) un punto; 2) due punti; 3) infiniti punti; 4) nessun punto.

3 In un piano sono date due circonferenze non congruenti, l'una esterna all'altra. Di omotetie che trasformano la minore nella maggiore ve ne sono:

A nessuna.
B una sola.
C due soltanto.
D infinite.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e motivare in maniera esauriente la scelta operata.

4 In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata l'affinità (A) di equazioni:

$$x=-2X+3Y, \quad y=X-2Y.$$

Calcolare l'area della figura trasformata di un cerchio di raggio 1 secondo l'affinità (A).

5 Considerata la successione di termine generale:

$$a_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

scriverla in forma ricorsiva.

6 Scrivere un algoritmo che generi i primi 20 numeri della successione di cui al precedente quesito 5 e li comunichi sotto forma di matrice di 4 righe e 5 colonne.

7 Considerata la successione di termine generale:

$$a_n=\begin{cases} 2 & \text{se } n=1 \\ \dfrac{1}{3}a_{n-1} & \text{se } n>1 \end{cases}$$

calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

8 Considerata la funzione $f(x)$ tale che:

$$f(x)=\int_0^x (1-\ln t)\,dt, \quad \text{con } x>0,$$

determinare i suoi zeri e gli intervalli in cui cresce o decresce.

9 Come si sa, la parte di sfera compresa fra due piani paralleli che la secano si chiama *segmento sferico a due basi*. Indicati con r_1 ed r_2 i raggi delle due basi del segmento sferico e con h la sua altezza (distanza tra le basi), dimostrare che il volume V del segmento sferico considerato è dato dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{6}\pi h(h^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2).$$

Qualunque sia il metodo seguito per la dimostrazione, esplicitare ciò che si ammette.

10 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x (1 - e^{-t})dt}{\operatorname{sen}^2 x}$$

essendo e la base dei logaritmi naturali.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2003
Sessione straordinaria

PROBLEMA 1

a) Posto $f(x) = x^3 + 2x - 50$, la funzione f è continua in $\mathbb{R}$, i limiti agli estremi del campo di esistenza valgono $\lim_{x\to\pm\infty} (x^3 + 2x - 50) = \pm\infty$ e la derivata prima $f'(x) = 3x^2 + 2$ è sempre positiva in $\mathbb{R}$. Per il teorema di unicità dello zero, la funzione f ha uno e un solo punto in cui si annulla e quindi l'equazione $x^3 + 2x - 50 = 0$ ammette una e una sola soluzione reale $\bar{x}$.

b) Si considera l'immagine della funzione $f(x) = x^3 + 2x - 50$ per alcuni valori interi di x:

$$f(2) = -38, \quad f(3) = -17, \quad f(4) = 22.$$

Si osserva che nell'intervallo [3; 4] la funzione cambia di segno, pertanto lo zero $\bar{x}$ della funzione è localizzato in tale intervallo, ovvero $z < \bar{x} < z + 1$, con $z = 3$.

c) È noto che lo zero $\bar{x}$ della funzione $f(x) = x^3 + 2x - 50$ è compreso nell'intervallo [3; 4]. Si procede alla risoluzione approssimata dell'equazione $f(x) = 0$ attraverso il metodo di bisezione. Si costruisce il seguente algoritmo, il quale chiede in ingresso l'approssimazione ε voluta.

• Inizio Programma Equazione polinomiale	
• Leggi ε	Si legge il valore dell'approssimazione
• $g = 3$	Si assegna alla variabile g il grado dell'equazione,
• $A = [1, 0, 2, -50]$	al vettore A i coefficienti dell'equazione polinomiale,
• $x_1 = 3$	alla variabile x_1 l'estremo sinistro dell'intervallo,
• $x_2 = 4$	alla variabile x_2 l'estremo destro dell'intervallo,
• $P_1 = -17$	alla variabile P_1 il valore $f(3) = -17$
• Ripeti	Si costruisce il ciclo basato sul metodo di bisezione
• $x_M = (x_1 + x_2)/2$	Si calcola il punto medio dell'intervallo $[x_1; x_2]$
• $i = 0$	Si azzera il contatore i
• $P_M = 0$	Si azzera la variabile P_M
• Ripeti	Si calcola il valore $f(x_M)$ contenuto in P_M
• $i \leftarrow i + 1$	
• $P_M \leftarrow P_M \cdot x_M + A_{\downarrow i}$	
• finché $i = g + 1$	
• Se $P_1 \cdot P_M > 0$	Si effettua il controllo sulla posizione della radice rispetto al punto medio
• allora $x_1 = x_M$, $P_1 = P_M$,	
• altrimenti $x_2 = x_M$,	
• finché $x_2 - x_1 < \varepsilon$	Si effettua il controllo sull'approssimazione voluta
• Scrivi x_M	Si mostra la radice approssimata
• Fine	

In linguaggio Derive il programma corrispondente da scrivere nella riga di editazione delle espressioni è il seguente:

```
Equaz(ε):=PROG (g:=3, A:=[1, 0, 2, −50], x1:=3, x2:=4, P1:=−17, LOOP (xM:=(x1+
x2)/2, i:=0, PM:=0, LOOP (i:=i+1, PM:=PM·xM+ASUBi, IF (i=g+1, exit)), IF (P1·PM>
0, PROG (x1:=xM, P1:=PM), x2:=xM), IF (x2−x1<ε, exit)), RETURN [xM])
```

Nella figura 1 è riportato il programma come appare nella finestra algebrica.

d) Considerata la funzione parametrica $f_k(x) = (x^3 + 2x - 50) + k(x^3 + 2x - 75)$, con $k \neq -1$, si può scrivere:

$$f_k(x) = (k+1)x^3 + 2(k+1)x - 25(2+3k).$$

Essa è continua e ha derivata prima:

$$f_k'(x) = 3(k+1)\,x^2 + 2(k+1).$$

Si studia il segno di quest'ultima ponendo $3(k+1)x^2 + 2(k+1) > 0$:

- se $k > -1$, $3(k+1)\,x^2 + 2(k+1) > 0 \rightarrow 3x^2 + 2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$;
- se $k < -1$, $3(k+1)\,x^2 + 2(k+1) > 0 \rightarrow 3x^2 + 2 < 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$.

Poiché per $k > -1$ si ha $f_k'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, la funzione $f_k(x)$ è crescente, mentre per $k < -1$ è $f_k'(x) < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e quindi la funzione $f_k(x)$ è decrescente.

In conclusione non esistono valori di k per cui la funzione f_k ammette un massimo e un minimo relativi.

e) La funzione $f_k(x) = (k+1)\,x^3 + 2(k+1)\,x - 25(2+3k)$ è simmetrica rispetto all'origine O se vale che $f_k(-x) = -f_k(x)$, ovvero se è verificata l'uguaglianza:

$$(k+1)(-x)^3 + 2(k+1)(-x) - 25(2+3k) =$$
$$= -(k+1)x^3 - 2(k+1)x + 25(2+3k), \text{ cioè}$$
$$-(k+1)x^3 - 2(k+1)x - 25(2+3k) = -(k+1)x^3 - 2(k+1)x + 25(2+3k)$$

Confrontando i due membri dell'uguaglianza, deve essere:

$$-25(2+3k) = 25(2+3k) \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{2}{3}.$$

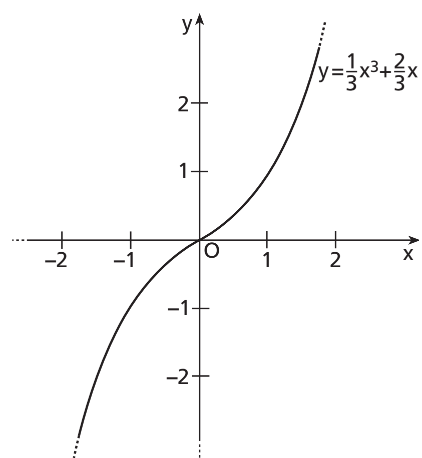
Pertanto la curva $G_{\bar{k}}$, con $\bar{k} = -\frac{2}{3}$, di equazione:

$$f_{-\frac{2}{3}}(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x,$$

è simmetrica rispetto all'origine del sistema di riferimento cartesiano. Il suo grafico è rappresentato nella figura 2.

```
#1:   InputMode := Word

#2:   CaseMode := Sensitive

      Equaz(ε) :=
        Prog
          g := 3
          A := [1, 0, 2, -50]
          x1 := 3
          x2 := 4
          P1 := -17
          Loop
            xM := (x1 + x2)/2
            i := 0
            PM := 0
#3:         Loop
              i := i + 1
              PM := PM·xM + A↓i
              If i = g + 1 exit
            If P1·PM > 0
              Prog
                x1 := xM
                P1 := PM
              x2 := xM
            If x2 - x1 < ε exit
          RETURN [xM]

#4:   Equaz(10^-4)

#5:                        [3.503234863]
```

▲ **Figura 1.**



▲ **Figura 2.**

PROBLEMA 2

a) Si suppone di attribuire agli uomini del gruppo un numero da 1 a 3, mentre alle rispettive mogli le lettere A, B, C. Le possibili terne di coppie di ballerini sono rappresentate per riga nel seguente schema.

1*A*	2*B*	3*C*
1*A*	2*C*	3*B*
1*B*	2*A*	3*C*
1*B*	2*C*	3*A*
1*C*	2*A*	3*B*
1*C*	2*B*	3*A*

Le terne possibili sono pertanto 6.

Il medesimo risultato può essere ottenuto considerando fissi i tre ballerini, nella successione 1, 2, 3, nella quale intercalare la terna variabile delle tre ballerine A, B, C:

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Le possibili terne sono allora determinate dalle permutazioni dei tre elementi A, B, C, ovvero $P_3 = 3! = 6$.

b1) Considerato l'evento:

E_1 = "nessun uomo balla con la propria moglie",

si calcola la probabilità $P(E_1)$ applicando la definizione classica di probabilità, intesa come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili. Osservando lo schema, i casi favorevoli sono 2 (la quarta e la quinta terna), mentre i casi possibili sono 6. Pertanto vale:

$$P(E_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

b2) Posto:

E_2 = "un solo uomo balla con la propria moglie",

i casi favorevoli sono forniti dalle terne $(1A, 2C, 3B)$, $(1B, 2A, 3C)$, $(1C, 2B, 3A)$ e quindi risulta:

$$P(E_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

b3) Preso:

E_3 = "tutti e tre gli uomini ballano con le rispettive mogli",

c'è un solo caso favorevole e la probabilità vale:

$$P(E_3) = \frac{1}{6}.$$

c1) Utilizzando lo schema delle prove ripetute, la probabilità che un evento E, di probabilità costante p, si verifichi x volte su n prove, è data dalla distribuzione binomiale $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, dove la variabile X corrisponde al numero delle volte che l'evento può verificarsi. Il valore medio di tale distribuzione è $M(X) = np$.
Per l'evento E_3 = "tutti e tre gli uomini ballano con le rispettive mogli", la probabilità p vale $\frac{1}{6}$ e se $n = 24$, risulta:

$$M(X) = 24 \cdot \frac{1}{6} = 4.$$

c2) Considerato l'evento E_1 = "nessun uomo balla con la propria moglie" con probabilità $p = \frac{1}{3}$, si costruisce la corrispondente tabella della distribuzione binomiale con $n = 4$ e la relativa funzione di ripartizione.

X	0	1	2	3	4
P	0,197531	0,395062	0,296296	0,098765	0,012346
F	0,197531	0,592593	0,888889	0,987654	1

La funzione di ripartizione per $X = 2$ vale 0,888889. Pertanto la probabilità che non più di 2 volte capiti che nessun uomo balli con la propria moglie risulta essere 0,888889.

c3) Poiché la probabilità che un solo uomo balli con la propria moglie è uguale a $\frac{1}{2}$, si applica la distribuzione binomiale quando $x = 30$, $p = \frac{1}{2}$ ed $n = 60$:

$$P(X = 30) = \binom{60}{30}\left(\frac{1}{2}\right)^{30}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{60-30} \simeq 0,1026,$$

ovvero la probabilità che esattamente 30 volte capiti che un solo uomo balli con la propria moglie è circa 0,1026.

c4) Si considera l'evento:

E_4 = "almeno un uomo balla con la propria moglie".

Osservando lo schema al punto a), i casi favorevoli sono 4 su 6 possibili, pertanto la probabilità dell'evento E_4 vale:

$$p=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Se si compiono $n=15$ prove, con la probabilità $p=\frac{2}{3}$ di verificarsi dell'evento e si assume la distribuzione binomiale $P(X=x)=\binom{15}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(1-\frac{2}{3}\right)^{15-x}$, la probabilità che almeno 14 volte capiti che almeno un uomo balli con la propria moglie risulta:

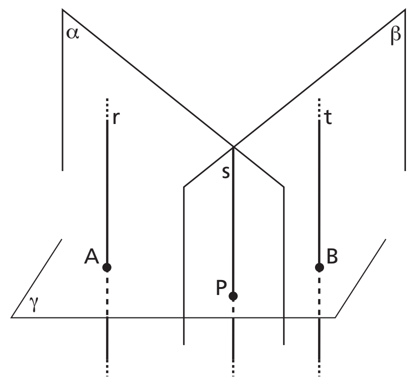
$$P(X\geq 14)=P(X=14)+P(X=15)=$$
$$=\binom{15}{14}\left(\frac{2}{3}\right)^{14}\left(\frac{1}{3}\right)+\binom{15}{15}\left(\frac{2}{3}\right)^{15}\left(\frac{1}{3}\right)^0\simeq 0{,}017127+0{,}002284=0{,}019411.$$

QUESTIONARIO

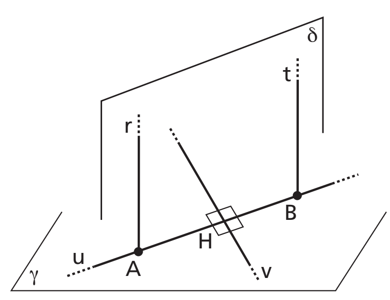
1 La relazione «due rette si dicono parallele se sono complanari e non hanno punti comuni» gode della proprietà transitiva. Infatti, si considerano due rette r ed s parallele tra loro e appartenenti al piano α (figura 3). Sia t una retta parallela ad s e sia β il piano che le contiene. Si vuole dimostrare che le rette r e t sono tra loro parallele. Si consideri un generico punto P della retta s e si conduca da esso un piano γ perpendicolare alla retta stessa. Per un noto teorema della geometria euclidea nello spazio, se due rette sono parallele, ogni piano perpendicolare all'una è perpendicolare pure all'altra. Pertanto il piano γ è perpendicolare sia alla retta r che alla retta t. Ora, si può dimostrare che due rette perpendicolari a uno stesso piano sono parallele tra loro. Infatti, siano A e B i piedi delle perpendicolari r e t sul piano γ e sia u la retta che congiunge A e B (figura 4).

Si conduca su γ una retta v perpendicolare alla u in un punto H. Dato che r è perpendicolare a γ e la retta u è perpendicolare a v, allora la retta v è perpendicolare al piano δ determinato dalle rette r e u, per il teorema delle tre perpendicolari.

Nella stessa maniera si dimostra che v è perpendicolare al piano individuato dalle rette t e u. Poiché di piani perpendicolari alla retta v ve ne è uno solo nel punto H, ne consegue che le rette r e t appartengono allo stesso piano. Essendo quest'ultime complanari ed entrambe perpendicolari alla stessa retta u allora sono parallele.



▲ **Figura 3.**



▲ **Figura 4.**

2 Data l'equazione $8x^2+8y^2-4kx+8y-3k=0$, essa può essere scritta nella forma:

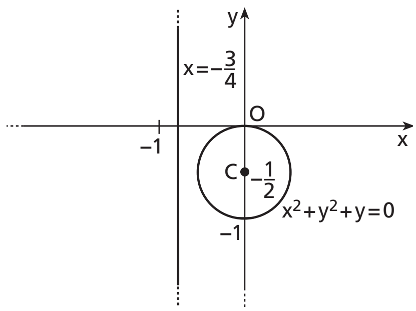
$$x^2+y^2+y+k\left(-\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}\right)=0.$$

Si tratta di una combinazione lineare tra l'equazione $x^2+y^2+y=0$, rappresentante la circonferenza di centro $C\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ e raggio $r=\frac{1}{2}$, e la retta $x=-\frac{3}{4}$ (figura 5).

Il luogo geometrico si riconduce a un fascio di circonferenze di centro $\left(\frac{k}{4};-\frac{1}{2}\right)$ e raggio $r_k=\sqrt{\frac{k^2}{16}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}k}$ se vale la condizione di realtà $\frac{k^2}{16}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}k\geq 0$. In particolare, si trova:

$$\frac{k^2}{16}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}k\geq 0 \quad\rightarrow\quad k^2+6k+4\geq 0 \quad\Rightarrow$$

$$k\leq -3-\sqrt{5} \lor k\geq -3+\sqrt{5}.$$



▲ **Figura 5.**

Per $k\leq -3-\sqrt{5} \lor k\geq -3+\sqrt{5}$, l'equazione di partenza è un fascio di circonferenze con generatrici di equazione: $x^2+y^2+y=0$ e $x=-\frac{3}{4}$ (figura 5).

Poiché il sistema delle generatrici, $\begin{cases} x^2+y^2+y=0 \\ x=-\frac{3}{4} \end{cases}$, ha equazione risolvente $y^2+y+\frac{9}{16}=0$ con discriminante negativo, l'asse radicale $x=-\frac{3}{4}$ è esterno alle circonferenze, le quali non possiedono punti base.

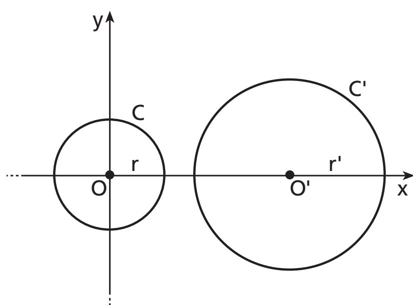
Si può concludere che il luogo geometrico è costituito da:

1) un punto quando $r_k=0$, ossia per $k=-3\pm\sqrt{5}$;
2) da due punti per nessun valore di k;
3) da infiniti punti per $k<-3-\sqrt{5} \lor k>-3+\sqrt{5}$;
4) da nessun punto per $-3-\sqrt{5}<k<-3+\sqrt{5}$.

3 Considerate in un piano due circonferenze non congruenti, l'una esterna all'altra, di raggio rispettivamente r ed $r'(r<r')$ e centro O e O', si ponga un sistema di riferimento cartesiano Oxy con l'origine nel centro della minore e con l'asse x passante per il centro della maggiore (figura 6).
Le equazioni delle due circonferenze sono:

$$\mathscr{C}: x^2+y^2=r^2,$$

$$\mathscr{C}': (x-x_{O'})^2+y^2=r'^2, \text{ ovvero } x^2+y^2-2xx_{O'}+x_{O'}^2-r'^2=0,$$



▲ **Figura 6.**

dove $x_{O'}>r+r'$.
Presa una generica omotetia di centro $C(x_C;y_C)$, di equazioni:

$$\begin{cases} x'=kx+p \\ y'=ky+q \end{cases}, \ k,p,q\in\mathbb{R}, \text{ con } \begin{cases} p=x_C(1-k) \\ q=y_C(1-k) \end{cases},$$

e le sue inverse,

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{k}x'-\dfrac{p}{k} \\ y=\dfrac{1}{k}y'-\dfrac{q}{k} \end{cases},$$

si impone che $\mathscr{C}'$ sia la trasformata di $\mathscr{C}$ secondo l'omotetia. Perciò si trasforma la curva $\mathscr{C}$ attraverso le equazioni inverse:

$$x^2+y^2=r^2 \quad\to\quad \left(\frac{1}{k}x'-\frac{p}{k}\right)^2+\left(\frac{1}{k}y'-\frac{q}{k}\right)^2=r^2 \quad\to\quad x'^2+y'^2-2px'-2qy'+p^2+q^2-r^2k^2=0.$$

Tolti gli apici, si confronta l'equazione trovata con l'equazione $x^2+y^2-2xx_{O'}+x_{O'}^2-r'^2=0$. Per l'identità dei polinomi vale:

$$\begin{cases} -2p=-2x_{O'} \\ -2q=0 \\ p^2+q^2-r^2k^2=x_{O'}^2-r'^2 \end{cases} \quad\to\quad \begin{cases} p=x_{O'} \\ q=0 \\ k^2=\dfrac{r'^2}{r^2}\to k=\pm\dfrac{r'}{r} \end{cases}.$$

Poiché il rapporto di omotetia k può assumere due valori, esistono due omotetie che trasformano la circonferenza $\mathscr{C}$ nella circonferenza $\mathscr{C}'$. La risposta esatta è quindi C.

4 È noto che un'affinità $\begin{cases} X=ax+by+c \\ Y=a'x+b'y+c' \end{cases}$ trasforma una circonferenza in un'ellisse e che il rapporto tra le aree S e S' di due figure, una trasformata dell'altra rispetto all'affinità, si conserva e vale $\dfrac{S'}{S}=\left|\det\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}\right|$.

Ora, data l'affinità $\begin{cases} x=-2X+3Y \\ y=X-2Y \end{cases}$ e la sua inversa, $\begin{cases} X=-2x-3y \\ Y=-x-2y \end{cases}$, la matrice associata alla trasformazione inversa è $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. Considerato il cerchio di raggio 1 e superficie $S=\pi$, per quanto detto esso viene trasformato in un'ellisse di area S' tale che:

$$\frac{S'}{\pi}=\left|\det\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\right|=4-3=1 \quad\Rightarrow\quad S'=\pi.$$

In conclusione il cerchio di raggio unitario è trasformato in un'ellisse di uguale area.

5 Data la successione di termine generale $a_n=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, con $n\in\mathbb{N}$, la sua rappresentazione per enumerazione è:

$$0,\ 1,\ 5,\ 14,\ 30,\ 55,\ 91,\ 140,\ 204,\ \ldots.$$

Si nota che il termine n-esimo può essere ottenuto dalla somma del termine precedente con il quadrato di n stesso:

$$a_0=0$$
$$a_1=1=0+1^2$$
$$a_2=5=1+2^2$$
$$a_3=14=5+3^2$$
$$a_4=30=14+4^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n=a_{n-1}+n^2$$

Pertanto la forma ricorsiva della successione è:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + n^2 \text{ se } n > 0 \end{cases}$$

6 L'algoritmo che genera i primi 20 numeri della successione $a_n = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ e li comunica sotto forma di matrice di 4 righe e 5 colonne, può avere la seguente forma.

• Inizio Programma Successione	
• $Matrice = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Si assegna alla variabile *Matrice* una matrice 4×5
• $n = 0$	Si azzera l'indice della successione a_n
• $i = 0$	Si azzera il contatore delle righe della matrice
• Ripeti	Si costruiscono i due cicli annidati per i contatori i e j che realizzano la matrice richiesta
• $i \leftarrow i + 1$	Si incrementa il contatore i
• $j = 0$	Si azzera il contatore delle colonne della matrice
• Ripeti	
• $j \leftarrow j + 1$	Si incrementa il contatore j
• $Matrice_{\downarrow i \downarrow j} = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$	Si compie il calcolo del termine della successione a_n
• $n \leftarrow n + 1$	Si incrementa l'indice n
• finché $j = 5$	
• finché $i = 4$	
• Scrivi *Matrice*	Si comunica in uscita la matrice calcolata
• Fine	

In linguaggio Derive il programma corrispondente da scrivere nella riga di editazione delle espressioni è il seguente:

```
Succ_01(fittizia): = PROG(Matrice: = VECTOR(VECTOR(0, a, 1, 5), b, 1, 4), n: = 0, i: = 0,
LOOP(i: = i + 1, j: = 0, LOOP(j: =j + 1, MatriceSUBiSUBj: = 1/6 · n · (n + 1) · (2 · n + 1), n: = n + 1,
IF(j = 5, exit)), IF(i = 4, exit)), RETURN Matrice)
```

Nella figura 7 è riportato il programma come appare nella finestra algebrica.

```
#1:   InputMode := Word

#2:   CaseMode := Sensitive

      Succ_01(fittizia) :=
        Prog
          Matrice := VECTOR(VECTOR(0, a, 1, 5), b, 1, 4)
          n := 0
          i := 0
          Loop
            i := i + 1
#3:         j := 0
            Loop
              j := j + 1
              Matrice↓i↓j := 1/6·n·(n + 1)·(2·n + 1)
              n := n + 1
              If j = 5 exit
            If i = 4 exit
          RETURN Matrice

#4:   Succ_01(1)
```

$$\#5: \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 14 & 30 \\ 55 & 91 & 140 & 204 & 285 \\ 385 & 506 & 650 & 819 & 1015 \\ 1240 & 1496 & 1785 & 2109 & 2470 \end{bmatrix}$$

◀ **Figura 7.**

7 La successione in forma ricorsiva, $a_n = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 1 \\ \dfrac{1}{3} a_{n-1} & \text{se } n > 1 \end{cases}$, è una successione geometrica di ragione $q = \dfrac{1}{3}$ e primo termine $a_1 = 2$. La somma S_n dei primi n termini risulta:

$$S_n = 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\frac{1}{3} - 1} = 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = 3\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right].$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente se esiste il limite $\lim_{n\to\infty} S_n$. Pertanto vale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 3\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = 3.$$

8 Si trova l'espressione di $f(x)$ calcolando l'integrale $\int_0^x (1 - \ln t)\, dt$:

$$\int_0^x (1 - \ln t)\, dt = \int_0^x dt - \int_0^x \ln t\, dt = x - \int_0^x \ln t\, dt = x - \lim_{h\to 0^+} \int_h^x \ln t\, dt =$$

applicando l'integrazione per parti:

$$= x - \lim_{h\to 0^+}\left([t \ln t]_h^x + \int_h^x t \cdot \frac{1}{t}\, dt\right) = x - x\ln x + \lim_{h\to 0^+} h \ln h + x =$$

essendo $\lim_{h\to 0^+} h \ln h = 0$ per il teorema di De L'Hospital, risulta:

$$= 2x - x\ln x.$$

Si studia la funzione $f(x) = 2x - x\ln x$, con $x > 0$.
Gli zeri si ottengono ponendo $f(x) = 0$:

$$2x - x\ln x = 0 \to x(2 - \ln x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \vee 2 - \ln x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ \text{non accettabile, e } x_2 = e^2.$$

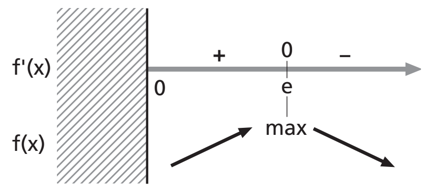
Lo zero di $f(x) = \int_0^x (1 - \ln t)\, dt$, con $x > 0$, è unico e vale $x = e^2$.

Si determina la crescenza e decrescenza studiando il segno della derivata prima $f'(x)$, che risulta essere, per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$f'(x) = 1 - \ln x, \quad x > 0.$$

Poiché $1 - \ln x > 0$ è vera nel C.E. per $0 < x < e$, si ha la seguente tabella dei segni della derivata prima (figura 8).
La funzione $f(x)$ è pertanto strettamente crescente per $0 < x < e$, ha un massimo per $x = e$, è strettamente decrescente per $x > e$.

Figura 8.



9 L'intento è di dimostrare la formula del volume di un segmento sferico a due basi attraverso il calcolo integrale. Si può diversamente seguire la via della geometria euclidea nello spazio, applicando il teorema di equivalenza tra un segmento sferico a una base e la somma di una particolare sfera e di un cilindro.
Nella figura 9 si ottiene un segmento sferico a due basi attraverso la rotazione intorno all'asse delle x di un arco di circonferenza di raggio r, di equazione $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, con $x_1 \le x \le x_2$.
Per il calcolo integrale, il volume del solido di rotazione si trova tramite la formula $V = \pi \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2\, dx$. Nel caso in questione vale:

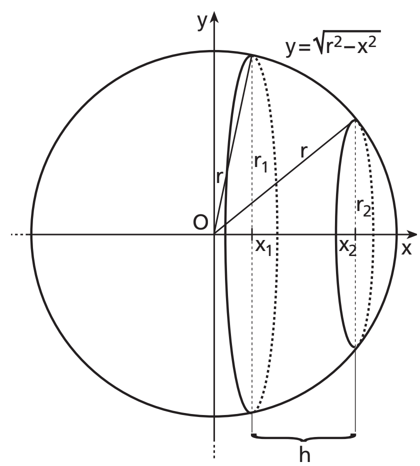


Figura 9.

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} (\sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx = \pi \int_{x_1}^{x_2} (r^2 - x^2)\, dx =$$

$$= \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{x_1}^{x_2} = \pi \left[r^2 (x_2 - x_1) - \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3) \right] =$$

$$= \frac{\pi}{3}(x_2 - x_1)[3r^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2)].$$

Essendo $x_2 - x_1 = h$, elevando al quadrato entrambi i membri, si ottiene $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = h^2$, da cui si ricava $x_1 x_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 - h^2)$. Sostituendo all'espressione del volume si ottiene:

$$V = \frac{\pi}{3} h \left\{ 3r^2 - \left[x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 - h^2) \right] \right\} = \frac{\pi}{3} h \left\{ 3r^2 - \frac{3x_1^2 + 3x_2^2 - h^2}{2} \right\} = \frac{\pi}{6} h (6r^2 - 3x_1^2 - 3x_2^2 + h^2).$$

Per il teorema di Pitagora risulta $x_1^2 = r^2 - r_1^2$ e $x_2^2 = r^2 - r_2^2$, pertanto, sostituendo si trova:

$$V = \frac{\pi}{6} h (6r^2 - 3r^2 + 3r_1^2 - 3r^2 + 3r_2^2 + h^2) = \frac{\pi}{6} h (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).$$

10 Per $x \to 0$, il limite ha forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Al numeratore vi è una funzione integrale ed esiste la sua derivata prima nell'intervallo $[0; x]$ che vale $D\left[\int_0^x (1 - e^{-t})\, dt\right] = 1 - e^{-x}$ per il teorema fondamentale del calcolo integrale. La funzione al denominatore, $y = \operatorname{sen}^2 x$ è derivabile e diversa da zero in un intorno di $x = 0$ escluso. Si può pertanto applicare il teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x (1 - e^{-t})\, dt}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{-x}}{2 \operatorname{sen} x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{-x}}{\operatorname{sen} 2x}.$$

Si tratta nuovamente di una forma indeterminata per la quale è utilizzabile ancora il teorema di De L'Hospital:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x}}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}.$$

Concludendo, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x (1 - e^{-t})\, dt}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{2}$.

Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel	Svolgi il
Problema 1	• Quesito 5 pag. W 171 • Test 51 pag. ι 27 • Esercizio 216 pag. W 194 • Esercizio 219 pag. W 194 • Esercizio 236 pag. J_1 74 • Esercizio 5 pag. ι 16
Problema 2	• Esercizio 41 pag. α 27 • Esercizio 22 pag. α 76 • Esercizio 60 pag. σ 58 • Esercizio 157 pag. σ 71 • Problema 18 pag. σ 76 (punto a)
Quesito 1	• Quesito 9 pag. W 165 • Test 2 pag. π 95 • Quesito 7 pag. π 9
Quesito 2	• Test 3 pag. L 426 • Quesito 6 pag. L 428 • Quesito 8 pag. L 428
Quesito 3	• Esercizio 425 pag. J_1 96 • Esercizio 426 pag. J_1 97
Quesito 4	• Esercizio 494 pag. J_1 108 • Esercizio 500 pag. J_1 109 • Esercizio 503 pag. J_1 110
Quesito 5	• Esercizio 31 pag. U 229 • Esercizio 218 pag. S 159
Quesito 6	• Esercizio 2 pag. T 32
Quesito 7	• Quesito 7 pag. U 240
Quesito 8	• Esercizio 319 pag. W 52 • Esercizio 188 pag. W 115 • Esercizio 189 pag. W 115
Quesito 9	• Esercizio 270 pag. W 124 • Esercizio 275 pag. W 124
Quesito 10	• Esercizio 198 pag. W 115 • Quesito 2 pag. W 168