# ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
# CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005
## Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

### PROBLEMA 1

Sono dati una piramide triangolare regolare e il prisma retto inscritto in essa in modo che una base sia la sezione della piramide con il piano equidistante dal suo vertice e dalla sua base.

**A)** Ammesso di conoscere il volume della piramide, dire se è possibile calcolare il volume del prisma e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

**B)** Posto che lo spigolo della base *ABC* della piramide sia lungo 4 cm:

1) calcolare la misura dello spigolo della base *MNP* del prisma, complanare ad *ABC*;
2) supposto che gli spigoli *AB* e *MN* siano paralleli, riferire il piano dei triangoli *ABC* e *MNP* a un sistema di assi cartesiani avente l'origine in *A* e l'asse delle ascisse coincidente con la retta *AB* e trovare le coordinate dei vertici di tali triangoli;
3) determinare quindi l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare alla retta *AB* e passante per i punti *A*, *B*, *M* e verificare che passa pure per *N*;
4) dopo aver spiegato perché la trasformazione che muta il triangolo *ABC* nel triangolo *MNP* è una similitudine, trovarne le equazioni;
5) spiegare esaurientemente, col metodo preferito, com'è posizionata la circonferenza circoscritta al triangolo *MNP* rispetto al triangolo *ABC*.

### PROBLEMA 2

È assegnata la funzione $f_a(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$, dove $a$ è un parametro reale non nullo.

**1)** Dopo aver fornito la definizione di funzione limitata, spiegare perché la funzione $f_a(x)$ è limitata.

**2)** Una volta riferito il piano a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali $(Oxy)$ e indicato con $A$ il punto di massimo del grafico $G$ della funzione quando $a > 0$, scrivere l'equazione della circonferenza $\gamma$ di diametro $OA$.

**3)** Determinare quanti e quali punti hanno in comune la circonferenza $\gamma$ e la curva $G$, quando $a$ varia nell'insieme dei numeri reali positivi.

**4)** Calcolare il valore $\overline{a}$ di $a$ per il quale la circonferenza $\gamma$ e la curva $G$ hanno in comune i vertici di un triangolo equilatero.

**5)** Verificare che esiste un valore $a'$ di $a$ per il quale la funzione $f_{a'}(x)$ si può considerare la densità di probabilità di una variabile aleatoria continua e determinare la funzione di distribuzione di tale variabile.

## QUESTIONARIO

**1** È dato un trapezio rettangolo, in cui le bisettrici degli angoli adiacenti al lato obliquo si intersecano in un punto del lato perpendicolare alle basi.
Dimostrare che il triangolo avente per vertici questo punto e gli estremi del lato obliquo è rettangolo e trovare quale relazione lega il lato obliquo alle basi del trapezio.

**2** Siano $AB$, $AC$, $AD$ tre spigoli di un cubo. Sapendo che uno spigolo è lungo $s$, calcolare la distanza del vertice $A$ dal piano dei punti $B$, $C$, $D$.

**3** Alberto e Gianna sono chiamati a risolvere la seguente equazione: $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{4}$. Alberto ottiene come soluzione gli angoli $x$ tali che: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ oppure $x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$ ($k$ intero qualsiasi); Gianna trova la seguente soluzione: $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$ ($k$ intero qualsiasi).
È vero o è falso che Alberto ha risolto correttamente e Gianna no? Fornire una risposta esauriente.

**4** Si consideri la seguente equazione in $x$:

$(k-2)x^2 - (2k-1)x + (k+1) = 0$, dove $k$ è un parametro reale diverso da 2.

Indicate con $x'$ e $x''$ le sue radici, calcolare i limiti di $x' + x''$ quando $k$ tende a 2, a $+\infty$ e a $-\infty$.

**5** Il limite della funzione $(1-x)^{\frac{1}{x}}$ per $x \to 0$:

A) è uguale a 1;
B) è uguale $+\infty$;
C) non esiste;
D) è uguale a $e$;
E) è uguale a $\frac{1}{e}$,

con $e$ la base dei logaritmi naturali.
Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornirne una spiegazione esauriente.

**6** Dimostrare che, se la derivata di una funzione reale di variabile reale $f(x)$ è nulla per ogni $x$ di un dato intervallo $J$, allora $f(x)$ è costante in $J$.

**7** Spiegare in maniera esauriente perché una funzione reale di variabile reale integrabile in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ non necessariamente ammette primitiva in $[a; b]$.

**8** In un'urna ci sono due palline bianche, in una seconda urna ci sono due palline nere e in una terza urna ci sono una pallina bianca e una pallina nera. Scegli a caso un'urna ed estrai, sempre a caso, una delle due palline in essa contenute: è bianca. Saresti disposto a scommettere alla pari che la pallina rimasta nell'urna che hai scelto sia essa pure bianca?

**9** Si consideri il seguente sistema nelle incognite $x$, $y$, $z$:

$$\begin{cases} ax + y + z = a \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a \end{cases}$$

dove $a$ è un parametro reale. Il sistema è:

A) determinato per ogni valore di $a$;
B) indeterminato per un valore di $a$ e impossibile per un valore di $a$;
C) indeterminato per nessun valore di $a$, ma impossibile per un valore di $a$;
D) impossibile per nessun valore di $a$, ma indeterminato per un valore di $a$.

Un sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

**10** Si consideri la trasformazione geometrica di equazioni:

$$x' = 2x + my - 1, \qquad y' = mx - 2y - 2,$$

dove $m$ è un parametro reale. Trovare l'equazione del luogo geometrico dei suoi punti uniti.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

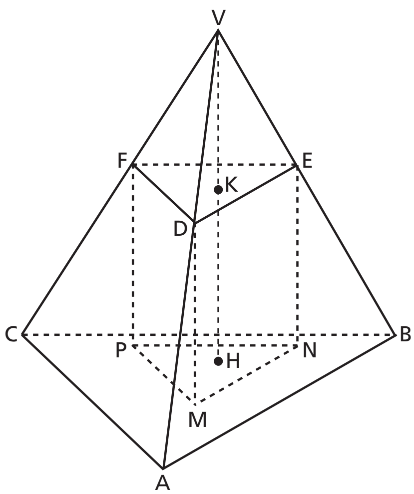
### PROBLEMA 1

**A)** Nella figura 1 sono disegnati la piramide triangolare regolare, di base $ABC$ equilatera e altezza $VH$, e il prisma triangolare inscritto nella piramide, di base $DEF$ equilatera e altezza $KH = \frac{1}{2} VH$.

La piramide triangolare di vertice $V$ e base $DEF$ è simile alla piramide di base $ABC$ e vertice $V$, con rapporto di similitudine $k = \frac{1}{2}$ per ipotesi, pertanto i volumi delle due piramidi hanno rapporto $k^3 = \frac{1}{8}$:

$$\mathrm{Vol}_{DEFV} = \frac{1}{8} \mathrm{Vol}_{ABCV}.$$

Ora, la piramide $DEFV$ ha base e altezza congruenti al prisma inscritto di partenza: essa è quindi equivalente alla terza parte del prisma cioè $\mathrm{Vol}_{DEFV} = \frac{1}{3} \mathrm{Vol}_{\text{prisma}}$. Sostituendo nella relazione precedente si trova:



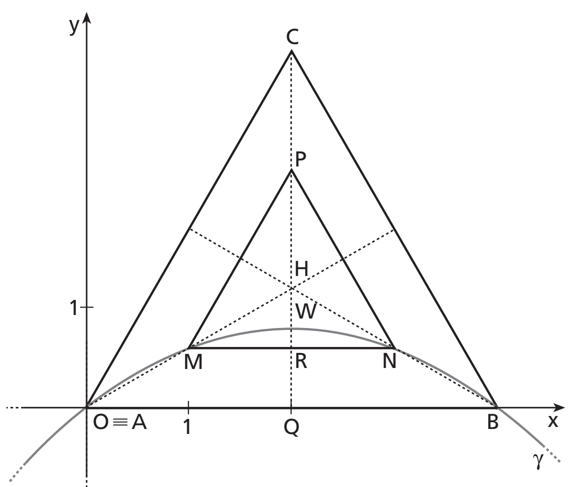

▲ **Figura 1.**

$$\frac{1}{3} \mathrm{Vol}_{\text{prisma}} = \frac{1}{8} \mathrm{Vol}_{ABCV} \quad \to \quad \mathrm{Vol}_{\text{prisma}} = \frac{3}{8} \mathrm{Vol}_{ABCV}.$$

In conclusione, il volume del prisma inscritto è $\frac{3}{8}$ del volume della piramide $ABCV$.

**B1)** Nel punto A) si è osservato che i triangoli equilateri $MNP$ e $ABC$ sono simili con rapporto di similitudine $k = \frac{1}{2}$. Se il lato di $ABC$ misura 4 cm, il lato di $MNP$ è lungo 2 cm.

**B2)** Nella figura 2 sono rappresentati i triangoli $ABC$ e $MNP$ nel sistema di assi cartesiani come richiesto.




◀ **Figura 2.**

I punti $A$ e $B$ hanno coordinate $A(0;\ 0)$ e $B(4;\ 0)$; il punto $C$ ha ascissa $\frac{x_A + x_B}{2} = 2$ e ordinata pari all'altezza del triangolo equilatero $ABC$, ovvero $2\sqrt{3}$. Pertanto $C(2;\ 2\sqrt{3})$. Il punto $H$ è ortocentro, incentro e baricentro del triangolo equilatero $ABC$ e del triangolo equilatero $MNP$: esso divide la mediana $CQ$ in due parti, una doppia dell'altra, per cui $H\left(2;\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. Per il rapporto di similitudine tra i due triangoli, risulta poi che $M$ è punto medio di $AH$, come $N$ lo è di $BH$ e $P$ di $CH$. Attraverso la formula del punto medio di un segmento si trova: $M\left(1;\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $N\left(3;\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e $P\left(2;\ \frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$.

**B3)** Una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse $y$ ha equazione generica $y = ax^2 + bx + c$.

Poiché la parabola passa per i punti $A(0;\ 0)$, $B(4;\ 0)$ e $M\left(1;\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, si ottiene il sistema in $a$, $b$, $c$:

$$\begin{cases} c = 0 \\ 16a + 4b + c = 0 \\ a + b + c = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 4a + b = 0 \\ a + b = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = -4a \\ -3a = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{\sqrt{3}}{9} \\ b = \frac{4}{9}\sqrt{3} \\ c = 0 \end{cases}.$$

La parabola ha equazione $y = -\frac{\sqrt{3}}{9}x^2 + \frac{4}{9}\sqrt{3}x$. Essa passa per il punto $N$ poiché tale punto è simmetrico al punto $M$ della parabola, rispetto all'asse di simmetria. Diversamente si può verificare che le coordinate di $N$ soddisfano l'equazione della parabola:

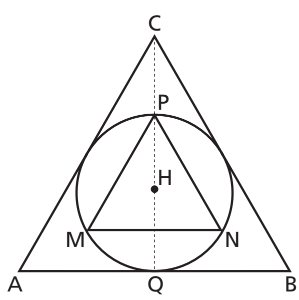
$$\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{9} \cdot 9 + \frac{4}{9}\sqrt{3} \cdot 3 \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Nella figura 2 è rappresentato il grafico della parabola.

**B4)** Nel punto A) è stato stabilito che i triangoli equilateri $MNP$ e $ABC$ sono simili con rapporto di similitudine $k = \frac{1}{2}$; nel punto B2) si era osservato che $M$ è punto medio di $AH$, come $N$ lo è di $BH$ e $P$ di $CH$ (figura 2). Si può così dedurre che la trasformazione che muta il triangolo $ABC$ nel triangolo $MNP$ è una particolare similitudine, ovvero un'omotetia di rapporto $k$ e centro $H\left(2;\ \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$. Pertanto la trasformazione geometrica ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x - 2) + 2 \\ y' = \frac{1}{2}\left(y - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right) + \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

**B5)** La circonferenza circoscritta al triangolo equilatero $MNP$ ha centro nel circocentro $H$ del triangolo e raggio $r = \overline{HP}$, cioè $r = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ (figura 3).




▲ **Figura 3.**

Tale circonferenza coincide con la circonferenza inscritta nel triangolo equilatero $ABC$. Infatti quest'ultima ha centro in $H$ e ha raggio $r' = \overline{HQ}$, cioè $r' = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

## PROBLEMA 2

**1)** Una funzione $f(x)$ si definisce limitata nel suo insieme di definizione $A$ se esiste un numero reale positivo $M$ tale che $|f(x)| \leq M \ \forall x \in A$.

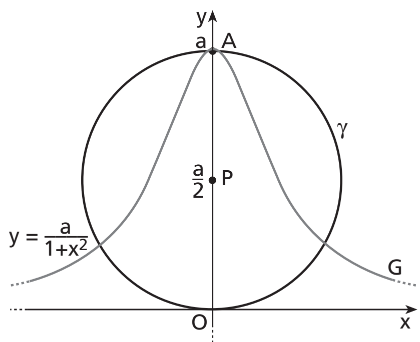
La funzione $f_a(x) = \frac{a}{1+x^2}$ ha come campo di esistenza l'insieme dei numeri reali. Osservando che $1 + x^2 \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, si può scrivere $|f_a(x)| = \left|\frac{a}{1+x^2}\right| \leq |a|$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pertanto la funzione è limitata nel campo reale.

**2)** Si studia il grafico $G$ della funzione $f_a(x) = \frac{a}{1+x^2}$, con $a$ positivo. Essa ha campo di esistenza reale; è simmetrica rispetto all'asse delle $y$ ed è sempre positiva; ha asintoto orizzontale $y = 0$, poiché $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a}{1+x^2} = 0$; ha derivata $f'_a(x) = \frac{-2ax}{(1+x^2)^2}$, pertanto ha massimo assoluto nel punto $A(0; a)$; ha derivata seconda $f''_a(x) = \frac{-2a(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}$, dunque ha flessi nei punti $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

La circonferenza di diametro $OA$ ha centro nel punto $P\left(0; \frac{a}{2}\right)$ e raggio uguale ad $\frac{a}{2}$. La sua equazione è:

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - ay = 0.$$

Nella figura 4 è rappresentato il grafico $G$ della funzione $f_a$ per un generico $a$ e il grafico $\gamma$ della circonferenza.




▲ **Figura 4.**

**3)** Per determinare le intersezioni delle curve $\gamma$ e $G$ bisogna risolvere il sistema delle loro equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - ay = 0 \\ y = \dfrac{a}{1+x^2} \end{cases}.$$

L'equazione risolvente è:

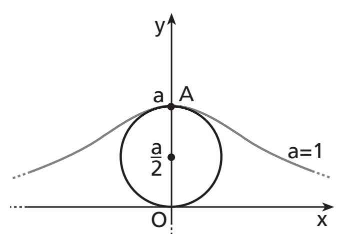
$$x^2 + \frac{a^2}{(1+x^2)^2} - \frac{a^2}{1+x^2} = 0 \ \rightarrow \ x^2(1+x^2)^2 + a^2 - a^2(1+x^2) = 0 \ \rightarrow \ x^2(1+x^2)^2 - a^2x^2 = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ x^2(x^4 + 2x^2 - a^2 + 1) = 0.$$

Per la legge di annullamento del prodotto: $x^2 = 0 \vee x^2 = -1 \pm a$.
Tenendo conto che $a$ è positivo, le soluzioni sono: $x = 0 \vee x = \pm\sqrt{-1+a}$.
In particolare:

se $a > 1$, le curve si intersecano in tre punti: $(0; a)$, $(-\sqrt{a-1}; 1)$, $(\sqrt{a-1}; 1)$;
se $a \leq 1$, le curve hanno solo il punto $(0; 1)$ in comune.

La figura 4 mostra dunque il caso in cui $a > 1$, mentre la figura 5 rappresenta le due curve per $a = 1$.

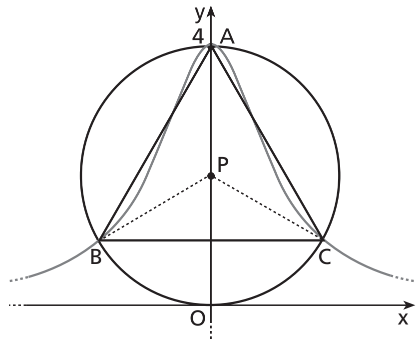



▲ **Figura 5.**

**4)** Indicati con $A$, $B$, $C$ i punti di intersezione delle due curve (figura 6), le loro coordinate sono: $A(0;\ a)$, $B(-\sqrt{a-1};\ 1)$, $C(\sqrt{a-1};\ 1)$, con $a>1$.
Sfruttando la simmetria della figura, affinché il triangolo $ABC$ sia equilatero, è sufficiente imporre $\overline{AC}=\overline{BC}$:

$$\sqrt{(\sqrt{a-1})^2+(1-a)^2}=2\sqrt{a-1}\rightarrow\sqrt{a-1+1+a^2-2a}=$$
$$=2\sqrt{a-1}\rightarrow\sqrt{a^2-a}=2\sqrt{a-1}.$$

Elevando al quadrato e semplificando per $(a-1)$ si ottiene $a=4$.




▲ **Figura 6.**

**5)** La funzione $f_a(x)=\dfrac{a}{1+x^2}$ è continua e positiva in tutto il campo reale per $a>0$. Affinché essa sia una funzione densità di probabilità deve valere: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)\,dx=1$.
Pertanto si calcola il seguente integrale:

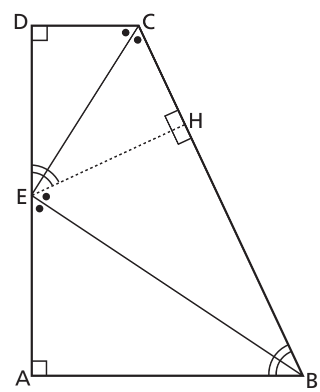
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{1+x^2}\,dx=a(\lim_{z\to+\infty}\operatorname{arctg} z-\lim_{z\to-\infty}\operatorname{arctg} z)=a\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=a\pi,$$

e si pone uguale a 1, cioè $a\pi=1\rightarrow a=\dfrac{1}{\pi}$.
Il valore $a'$ per cui la funzione è una densità di probabilità di una variabile aleatoria continua $X$, è $a'=\dfrac{1}{\pi}$. La densità ha quindi equazione: $f_{\frac{1}{\pi}}(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.
La funzione di distribuzione (o di ripartizione) $F(x)$ di una variabile aleatoria continua $X$ è definita come $F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Essa fornisce la probabilità che la variabile $X$ non superi un determinato valore $x$ ed è primitiva della funzione densità di probabilità $f(x)$. Nel caso specifico ha espressione:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\pi(1+t^2)}\,dt=\frac{1}{\pi}[\operatorname{arctg} x-\lim_{z\to-\infty}\operatorname{arctg} z]=\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg} x+\frac{\pi}{2}\right]=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}.$$

## QUESTIONARIO

**1** Nel trapezio rettangolo $ABCD$ (figura 7) il segmento $EB$ è bisettrice dell'angolo $A\hat{B}C$ ed $EC$ è bisettrice dell'angolo $B\hat{C}D$. Tali angoli sono supplementari perché angoli coniugati formati dalle parallele $AB$ e $DC$ e dalla trasversale $BC$. Pertanto gli angoli $E\hat{B}C$ e $B\hat{C}E$, essendo metà di angoli supplementari, sono tra loro complementari.
Il triangolo $CEB$, avendo due angoli complementari, è quindi retto in $E$.
Si tracci la perpendicolare $EH$ al lato $BC$. Risulta:
$D\hat{E}C\cong C\hat{E}H\cong E\hat{B}C$, perché complementari di angoli congruenti;
$E\hat{C}B\cong B\hat{E}H\cong A\hat{E}B$, poiché complementari di angoli congruenti.
Pertanto i triangoli $DEC$ e $CEH$ sono congruenti per il secondo criterio di congruenza, come pure i triangoli $ABE$ e $BEH$. In particolare, $CD\cong CH$ e $AB\cong BH$.
Essendo $BC=CH+BH$ si deduce che $BC=CD+AB$.
In conclusione, la somma delle basi del trapezio rettangolo è uguale al lato obliquo.

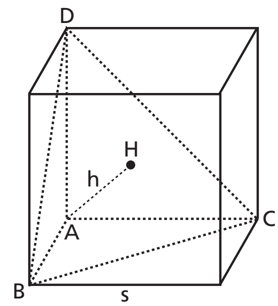



▲ **Figura 7.**

**2** Il piano passante per i punti $B$, $C$, $D$ delimita la piramide $ABCD$ (figura 8).
Lo scopo è quello di determinare l'altezza $h$ della piramide rispetto alla base triangolare $BCD$.
Si calcola dapprima il volume $V$ della piramide:

$V = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot h$, dove $S_{BCD}$ è l'area della base triangolare $BCD$.

Il triangolo $BCD$, avendo per lati le diagonali di tre facce del cubo, è equilatero e il lato vale $\sqrt{2}s$. Pertanto la sua area risulta:




▲ **Figura 8.**

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}\sqrt{2}s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}s = \frac{\sqrt{3}}{2}s^2$$

e il volume della piramide diventa $V = \frac{\sqrt{3}}{6}s^2 h$.

Esso può essere calcolato in altro modo, considerando come base il triangolo $ABC$. In tal caso $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{AD}$ ovvero $V = \frac{1}{6}s^3$. Uguagliando le due espressioni del volume si ottiene:

$$\frac{\sqrt{3}}{6}s^2 h = \frac{1}{6}s^3, \text{ da cui } h = \frac{\sqrt{3}}{3}s.$$

**3** Utilizzando la formula di duplicazione, l'equazione $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{4}$ è equivalente all'equazione $\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$ che ha soluzioni:

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5}{12}\pi + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

La risposta di Alberto è quindi esatta.

Le soluzioni fornite da Gianna, $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$, possono essere scritte diversamente, distinguendo se $k$ è pari o dispari, nel seguente modo:

- per $k$ pari, cioè $k = 2k'(k' \in \mathbb{Z})$, $x = \frac{\pi}{12} + 2k'\frac{\pi}{2}$ ovvero $x = \frac{\pi}{12} + k'\pi$;
- per $k$ dispari, cioè $k = 2k' + 1$ $(k' \in \mathbb{Z})$, $x = -\frac{\pi}{12} + (2k'+1)\frac{\pi}{2}$ ovvero $x = \frac{5}{12}\pi + k'\pi$.

Pertanto la soluzione data da Gianna è esatta ed è equivalente a quella fornita da Alberto.

**4** Affinché l'equazione di secondo grado $(k-2)x^2 - (2k-1)x + (k+1) = 0$ ammetta soluzioni reali è necessario che il discriminante sia maggiore o uguale a zero:

$$\Delta = (2k-1)^2 - 4(k-2)(k+1) \geq 0 \quad \rightarrow \quad 4k^2 + 1 - 4k - 4k^2 + 4k + 8 \geq 0 \quad \rightarrow \quad 9 \geq 0.$$

Tale condizione è quindi verificata per qualsiasi $k \in \mathbb{R}$.
Poiché in una equazione di secondo grado, $ax^2 + bx + c = 0$, la somma delle radici vale $x' + x'' = -\frac{b}{a}$, risulta:

$$x' + x'' = \frac{2k-1}{k-2}, \quad k \neq 2.$$

I limiti richiesti valgono: $\lim_{k \to 2^{\pm}} \frac{2k-1}{k-2} = \pm\infty$, e quindi $\lim_{k \to 2} \frac{2k-1}{k-2}$ non esiste, $\lim_{k \to \pm\infty} \frac{2k-1}{k-2} = 2$.

**5** Considerato il limite $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$, si tratta di una forma indeterminata $1^\infty$. Si pone $y=-\frac{1}{x}$, per cui $x=-\frac{1}{y}$ e per $x\to 0^\pm$ risulta $y\to\mp\infty$. Sostituendo nel limite precedente si ottiene:

$$\lim_{x\to 0^\pm}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to\mp\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to\mp\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}}.$$

Applicando il limite notevole $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$, ne consegue che $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{e}$.
La risposta esatta è pertanto la E).

**6** Si prendano due punti $x_1$ e $x_2$ con $x_1, x_2\in J$ e $x_1<x_2$. Essendo $J$ un intervallo, risulta $[x_1; x_2]\subseteq J$. Poiché la funzione è derivabile in $J$ per ipotesi, essa è continua e derivabile nell'intervallo $[x_1; x_2]$. È quindi applicabile su tale intervallo il teorema di Lagrange, cioè esiste almeno un punto $c\in\,]x_1; x_2[$ tale che:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c).$$

Per ipotesi, la derivata della funzione è nulla nell'intervallo $J$, per cui $f'(c)=0$. Risulta allora:

$$f(x_2)-f(x_1)=0, \text{ ovvero } f(x_2)=f(x_1).$$

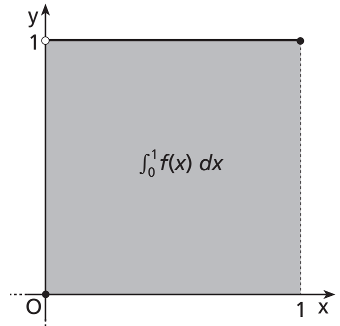
Dunque la funzione assume lo stesso valore in $x_1$ e $x_2$.
Tenendo conto dell'arbitrarietà dei punti $x_1$ e $x_2$ nell'intervallo $J$, la funzione è quindi costante su tutto l'intervallo di definizione.

**7** Data una funzione $f(x)$ continua in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$, si chiama primitiva di $f(x)$ in $[a; b]$ ogni funzione $F(x)$, continua e derivabile nell'intervallo, tale che $F'(x)=f(x)$.
Si definisce funzione integrale di $f(x)$ la funzione $\int_a^x f(t)\,dt$, con $x\in[a; b]$, ottenuta secondo la definizione di integrale definito e la funzione $f(x)$ si dice integrabile in $[a; b]$. Si dimostra che ogni funzione continua in un intervallo è in esso integrabile e il teorema fondamentale del calcolo integrale afferma che la funzione $\int_a^x f(t)\,dt$ è una funzione primitiva di $f(x)$, ovvero, posto $F'(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, risulta $F'(x)=f(x)$.
Ora, l'integrabilità di una funzione può essere estesa al caso di una funzione con un numero finito di punti di discontinuità. Ad esempio se $f(x)$, definita in $[a; b]$, ha un punto di discontinuità in $x=c$ interno all'intervallo, ed esistono finiti $\lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)\,dx$ e $\lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)\,dx$, allora la funzione è integrabile in senso improprio su $[a; b]$ e vale:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)\,dx+\lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)\,dx.$$

Consideriamo la funzione $f(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x=0\\ 1 & \text{se } 0<x\leq 1\end{cases}$. In base alla definizione di integrale definito essa è integrabile nell'intervallo [0; 1] e risulta:

$$\int_0^1 f(x)\,dx=1.$$



▲ **Figura 9.**

La funzione però non ammette primitiva in tale intervallo. Infatti una sua eventuale primitiva nell'intervallo aperto a sinistra $]0; 1]$ dovrebbe essere del tipo:

$$F(x) = x + c, \qquad x \in \,]0; 1], \; c \in \mathbb{R} \text{ (costante reale indeterminata).}$$

Definiamo $F(0)$ rispettando la necessaria continuità di $F$:

$$F(0) = \lim_{x \to 0^+} (x + c) = c.$$

Dunque:

$$F(x) = x + c \quad \forall x \in [0; 1], \; c \in \mathbb{R} \quad \text{quindi} \quad F'(x) = 1 \quad \forall x \in [0; 1].$$

D'altra parte dovendo essere $F'(0) = f(0)$ si avrebbe $1 = 0$: $f$ non ammette dunque primitiva.

**8** Scelta a caso un'urna tra le tre a disposizione, è stata estratta una pallina bianca. L'obiettivo è quello di calcolare la probabilità che la pallina rimasta nell'urna scelta sia pure essa bianca, ossia la probabilità di avere scelto l'urna $A$ sapendo che la pallina estratta è bianca.
Indicate ordinatamente con $A$, $B$ e $C$ le tre urne, si considerino i seguenti eventi:

$E$ = «la prima pallina estratta è bianca»,
$A$ = «è stata scelta l'urna $A$»,
$B$ = «è stata scelta l'urna $B$»,
$C$ = «è stata scelta l'urna $C$».

La probabilità che, uscita una pallina bianca, sia stata scelta l'urna $A$, è secondo il teorema di Bayes:

$$P(A|E) = \frac{P(A)\,P(E|A)}{P(A)\,P(E|A) + P(B)\,P(E|B) + P(C)\,P(E|C)}.$$

Ora, $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$, $P(E|A) = 1$, $P(E|B) = 0$, $P(E|C) = \frac{1}{2}$, e quindi risulta:

$$P(A|E) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Essendo la probabilità $P(A|E) = \frac{2}{3}$ maggiore di $\frac{1}{2}$, allora scommettere alla pari che la pallina rimasta nell'urna sia anch'essa bianca è vantaggioso.

**9** Il sistema lineare nelle incognite $x$, $y$, $z$:

$$\begin{cases} ax + y + z = a \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a \end{cases}$$

ha matrice incompleta:

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

Il suo determinante vale $D = a^3 - 3a + 2$ e può essere scritto come:

$$D = a^3 - a - 2a + 2 = a(a^2 - 1) - 2(a - 1) = (a - 1)(a^2 + a - 2) = (a - 1)^2(a + 2).$$

Per la regola di Cramer il sistema è determinato per $a \neq 1 \wedge a \neq -2$.
Per $a = 1$ le matrici incompleta e completa diventano:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le loro caratteristiche valgono entrambe 1 e per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è indeterminato e ammette $\infty^2$ soluzioni.
Per $a = -2$ le matrici incompleta e completa risultano:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

La caratteristica della matrice incompleta è 2 mentre per la matrice completa vale 3. Per il teorema appena indicato il sistema è quindi impossibile.
Si conclude che il sistema di partenza è indeterminato per $a = 1$, mentre è impossibile per $a = -2$. La risposta esatta è dunque B.

**10** Il sistema della trasformazione geometrica è:

$$\begin{cases} x' = 2x + my - 1 \\ y' = mx - 2y - 2 \end{cases}.$$

I punti uniti di una trasformazione sono quei punti che vengono trasformati in sé.
Assunto $x' = x$ e $y' = y$, il sistema diventa:

$$\begin{cases} x = 2x + my - 1 \\ y = mx - 2y - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + my - 1 = 0 \\ mx - 3y - 2 = 0 \end{cases}.$$

Per ottenere l'equazione cartesiana del luogo geometrico dei punti uniti, si procede all'eliminazione del parametro $m$:

$$\begin{cases} m = \dfrac{1-x}{y}, \quad y \neq 0 \\ \dfrac{1-x}{y}x - 3y - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 3y^2 - x + 2y = 0 \end{cases}.$$

L'equazione ottenuta, $x^2 + 3y^2 - x + 2y = 0$, con $y \neq 0$, è una conica con assi paralleli agli assi cartesiani. Operando il completamento del quadrato, risulta:

$$x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \text{ e } 3y^2 + 2y = 3\left(y^2 + \frac{2}{3}y\right) = 3\left[\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right].$$

L'equazione diventa:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{12} \quad \rightarrow \quad \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{7}{12}} + \frac{\left(y + \frac{1}{3}\right)^2}{\frac{7}{36}} = 1.$$

Si tratta di un'ellisse con centro nel punto $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$ e con semiassi di lunghezza $\sqrt{\frac{7}{12}}$ e $\frac{\sqrt{7}}{6}$.

È necessario discutere la condizione $y=0$ per vedere se l'ellisse è privata di qualche punto:

$$\begin{cases} y=0 \\ x^2+3y^2-x+2y=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}.$$

Il punto (0; 0) non appartiene al luogo $\begin{cases} x+my-1=0 \\ mx-3y-2=0 \end{cases}$ poiché, sostituendo, si trova il sistema impossibile: $\begin{cases} -1=0 \\ -2=0 \end{cases}$.

Mentre per (1; 0) si ha $\begin{cases} 1-1=0 \\ m-2=0 \end{cases} \rightarrow m=2$, che è un valore accettabile per il parametro $m$.

In conclusione il luogo dei punti uniti della trasformazione geometrica è l'ellisse di equazione

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{7}{12}}+\frac{\left(y+\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{7}{36}}=1,$$

privata del punto $O(0; 0)$.

| Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel | Svolgi il |
|---|---|
| Problema 1 | • Quesito 6 pag. π 96<br>• Esercizio 324 pag. L 229<br>• Problema 10 pag. L 93 (punto a)<br>• Esercizio 210 pag. L 215<br>• Esercizio 420 pag. $J_1$ 96 |
| Problema 2 | • Esercizio 71 pag. V 245<br>• Esercizio 182 pag. L 138<br>• Problema 1 pag. W 164 (punto a)<br>• Problema 1 pag. W 172 (punti c, d) |
| Quesito 1 | • Problema 2 pag. W 164 (punto a) |
| Quesito 2 | • Quesito 10 pag. π 96<br>• Problema 17 pag. π 97 (punto b) |
| Quesito 3 | • Test 234 pag. Q 49<br>• Esercizio 329 pag. Q 55<br>• Test 1 pag. Q 85 |
| Quesito 4 | • Esercizio 56 pag. U 162<br>• Esercizio 338 pag. U 178 |
| Quesito 5 | • Esercizio 266 pag. U 174<br>• Esercizio 268 pag. U 174 |
| Quesito 6 | • Quesito 10 pag. V 136<br>• Quesito 10 pag. W 171 |
| Quesito 7 | • Quesito 4 pag. W 70<br>• Quesito 6 pag. W 70 |
| Quesito 8 | • Esercizio 96 pag. α 87<br>• Quesito 3 pag. α 94 |
| Quesito 9 | • Quesito 5 pag. T 144<br>• Quesito 3 pag. T 193 |
| Quesito 10 | • Esercizio 14 pag. $J_1$ 49<br>• Problema 11 pag. L 422 (punto b)<br>• Problema 14 pag. L 423 (punto a) |