

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. - 2007**

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1:

Sia a un numero reale maggiore di zero e sia g la funzione definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$, da: $g(x) = a^x + a^{-x}$.

1. Si dimostri che, se $a \neq 1$, g è strettamente crescente per $x > 0$ e strettamente decrescente per $x < 0$.
2. Posto $a = e$, si disegni il grafico della funzione $f(x) = e^x + e^{-x}$ e si disegni altresì il grafico della funzione $\frac{1}{f(x)}$.
3. Si calcoli $\int_0^t \frac{1}{f(x)} dx$; successivamente, se ne trovi il limite per $t \rightarrow \infty$ e si interpreti geometricamente il risultato.
4. Verificato che il risultato del limite di cui al punto precedente è $\frac{\pi}{4}$, si illustri una procedura numerica che consenta di approssimare tale valore.

PROBLEMA 2:

Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo \widehat{CAB} si mantenga doppio dell'angolo \widehat{ABC} .

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C .
2. Si rappresenti γ , tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo \widehat{ABC} che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $\widehat{ABC} = 36^\circ$ allora è $AC = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

QUESTIONARIO:

1. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolvibile o meno.
2. La regione del piano racchiusa tra il grafico della funzione $y = \ln x$ e l'asse x , con $1 \leq x \leq e$, è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x , sono tutte rettangoli aventi l'altezza tripla della base. Si calcoli il volume di S e se ne dia un valore approssimato a meno di 10^{-2} .
3. Si dimostri che l'insieme delle *omotetie* con centro O fissato è un *gruppo*.
4. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Se ne spieghi l'importanza nelle applicazioni della matematica illustrando il significato di μ , σ , σ^2 e come tali parametri influenzino il grafico di $f(x)$.

5. Si consideri il teorema: “ *la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto* ” e si spieghi perché esso non è valido in un contesto di geometria *non-euclidea*. Quali le formulazioni nella geometria *iperbolica* e in quella *ellittica*? Si accompagni la spiegazione con il disegno.
6. Si scelga a caso un punto P all'interno di un triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza 3. Si determini la probabilità che la distanza di P da ogni vertice sia maggiore di 1.
7. Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri delle circonferenze del piano tangenti alla parabola $y = x^2 + 1$ nel punto $(1, 2)$.

8. A *Leonardo Eulero* (1707-1783), di cui quest'anno ricorre il terzo centenario della nascita, si deve il seguente problema: “Tre gentiluomini giocano insieme: nella prima partita il primo perde, a favore degli altri due, tanto denaro quanto ne possiede ciascuno di loro. Nella successiva, il secondo gentiluomo perde a favore di ciascuno degli altri due tanto denaro quanto essi già ne possiedono. Da ultimo, nella terza partita, il primo e il secondo guadagnano ciascuno dal terzo gentiluomo tanto denaro quanto ne avevano prima. A questo punto smettono e trovano che ciascuno ha la stessa somma, cioè 24 luigi. Si domanda con quanto denaro ciascuno si sedette a giocare.”
9. Si dimostri che l'equazione $2x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = 0$ ha un'unica radice reale e si trovi il suo valore con una precisione di due cifre significative.
10. Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera S e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta r passante per il centro di S , come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.