Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE
PIANO NAZIONALE INFORMATICA
Tema di: MATEMATICA

Problema 1

Si consideri la funzione:

$$y = \frac{2x^2 + ax + 3}{(x+1)^2}$$

dove a è un parametro reale.

1. Posto $a = 4$ si studi la C_4 in assi cartesiani ortogonali (Oxy).
2. Mediante una traslazione si assumano come nuovi assi di riferimento (OXY) gli asintoti della C_4 e si scriva la nuova equazione Y = f (X) della C_4.
3. Si calcoli quindi l'area della porzione di piano compresa tra la curva, l'asse X, la retta X = 1 e la retta X = h, essendo h un numero reale maggiore di 1. Si calcoli il limite si tale area per h $\to\infty$.
4. Si tracci C_5, corrispondente ad $a = 5$, rispetto al sistema (Oxy). Le curve C_4 e C_5 hanno un punto comune A, appartenente ad un asse; si trovino le equazioni delle tangenti alle curve in A.

Problema 2

Data una semicirconferenza di diametro AB = 2 r, si prenda sul prolungamento di AB, dalla parte di B, un punto C tale che sia BC = AB.
Essendo P un punto della semicirconferenza:

1. Si esprima per mezzo di r e dell'ampiezza dell'angolo $x = A\hat{P}B$ il rapporto $y = \dfrac{\overline{CP}^2}{\overline{AP}\cdot\overline{PB}}$
2. Si studi nell'intervallo $[0, 2\pi]$ la funzione $y = f(x)$ espressa per mezzo di tg x.
3. Si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) il valore di x, nell'intervallo $0 < x < \pi/2$, per cui il rapporto y assume valore minimo.
4. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva rappresentativa della funzione $y = f(x)$, dell'asse delle ascisse e dalle rette di equazione $x = \pi/4$ e $x = \pi/3$.

Questionario

1. Si calcoli il limite della funzione $y = \frac{\log(x+3) - \log(2x+1)}{x^2 + x - 6}$, quando x tende a 2.

2. Si calcoli il valore medio della funzione $y = \left|1 - x^2\right|$ nell'intervallo $-2 \le x \le 3$.

3. Data la funzione $y = \sqrt{1 - x^2}$, si stabilisca se sono verificate le condizioni di validità del teorema di Rolle nell'intervallo $-1 \le x \le 1$ e, in caso affermativo, si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema.

4. Si consideri la seguente preposizione: "Una piramide è retta se la verticale calata dal vertice cade entro il poligono di base". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

5. La regione finita di piano delimitata dalla curva di equazione $y = \sqrt{\sin x}$ e dall'asse x nell'intervallo $0 \le x \le \pi$ è la base di un solido S le cui sezioni ottenute con piani perpendicolari all'asse x sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di S.

6. Si verifichi che la curva di equazione $y = \frac{x-1}{x-2}$ è simmetrica rispetto all'intersezione dei suoi asintoti.

7. Si inscriva in una sfera di raggio r il cilindro di volume massimo.

8. È più probabile ottenere almeno un 6 lanciando quattro volte un dado o ottenere almeno un 12 lanciando ventiquattro volte due dadi?

9. Si enunci il quinto postulato di Euclide e si descriva qualche modello di planimetria non euclidea.

10. Si trovi per quali valori di k ammetta soluzione l'equazione trigonometrica: sen$x$ + cos$x$ = k.

PROBLEMA 1

Si consideri la funzione:

$$y = \frac{2x^2 + ax + 3}{(x+1)^2}$$

dove *a* è un parametro reale.

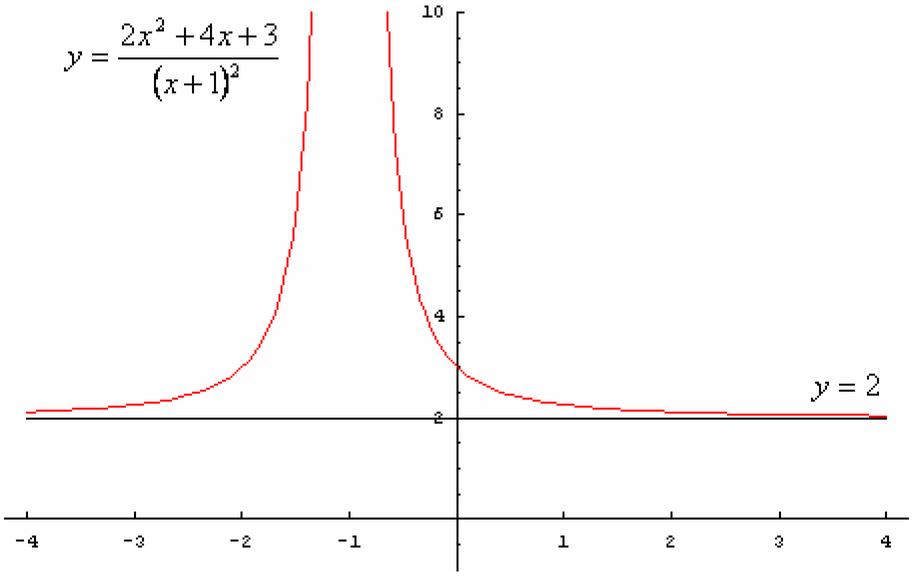
Punto 1

Posto *a* = 4 si studi la *C₄* in assi cartesiani ortogonali (*Oxy*).

La curva in esame è $y = \frac{2x^2 + 4x + 3}{(x+1)^2}$. Studiamola.

- *Dominio:* $\forall x \in R/\{-1\}$ cioè $D = (-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$;
- *Intersezioni asse ascisse:* $y = \frac{2x^2 + 4x + 3}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm i\sqrt{2}}{2}$ per cui non esistono intersezioni con l'asse delle ascisse;
- *Intersezioni asse ordinate:* $x = 0 \Rightarrow y = 3$;
- *Positività:* nel dominio la funzione è sempre positiva;
- *Asintoti verticali:* la retta $x = -1$ è asintoto verticale: infatti $\lim_{x \to -1^{\pm}} \frac{2x^2 + 4x + 3}{(x+1)^2} = +\infty$;
- *Asintoti orizzontali:* la retta $y = 2$ è asintoto orizzontale: infatti $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 + 4x + 3}{(x+1)^2} = 2$;
- *Crescenza e decrescenza:* la derivata prima è $y' = \frac{(4x+4)(x+1)^2 - (2x^2 + 4x + 3)2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(4x^2 + 8x + 4 - 4x^2 - 8x - 6)}{(x+1)^3} = -\frac{2}{(x+1)^3}$ per cui per $x < -1$ la funzione è crescente e per $x > -1$ è decrescente; non ci sono estremi relativi;
- *Flessi:* la derivata seconda è $y'' = \frac{6}{(x+1)^4}$ e non si annulla mai, per cui non ci sono flessi.

Il grafico è sotto presentato:



Punto 2

Mediante una traslazione si assumano come nuovi assi di riferimento (*OXY*) gli asintoti della *C4* e si scriva la nuova equazione Y = f (X) della *C4*.

La traslazione che permette di passare l'origine di riferimento nel punto $(-1,2)$, incontro degli asintoti della curva, è:

$$\begin{cases} X = x+1 \\ Y = y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X-1 \\ y = Y+2 \end{cases}$$

Sostituendo nella curva $y = \frac{2x^2+4x+3}{(x+1)^2}$ si ha : $Y = \frac{2(X-1)^2+4(X-1)+3}{X^2} - 2 = \frac{1}{X^2}$

Punto 3

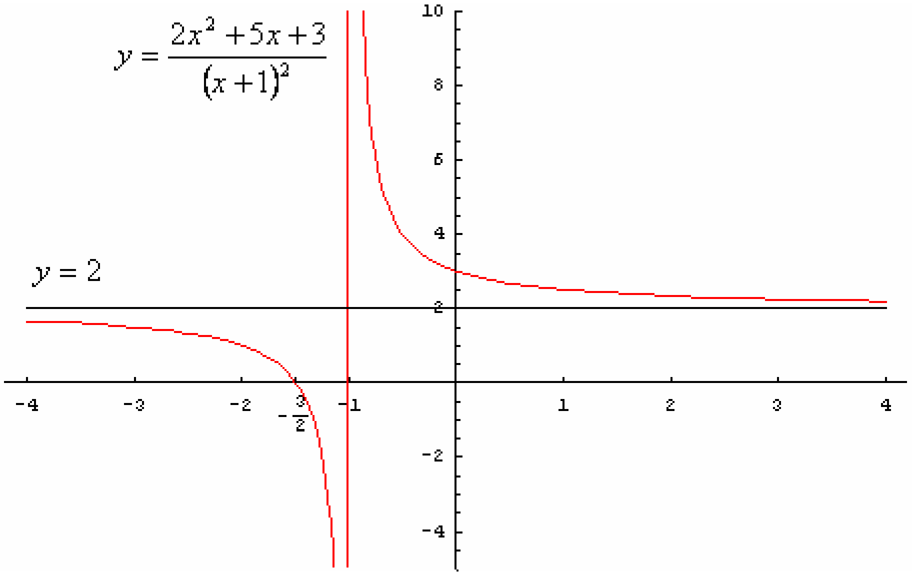
Si calcoli quindi l'area della porzione di piano compresa tra la curva, l'asse X, la retta X = 1 e la retta X = h, essendo h un numero reale maggiore di 1. Si calcoli il limite si tale area per h →∞.

L'area richiesta è pari a $A(h) = \int_1^h \left(\frac{1}{X^2}\right) dX = \left[-\frac{1}{X}\right]_1^h = 1 - \frac{1}{h}$, per cui $\lim_{h\to\infty} A(h) = \lim_{h\to\infty}\left(1-\frac{1}{h}\right) = 1$.

Punto 4

Si tracci *C5*, corrispondente ad *a* = 5, rispetto al sistema (*Oxy*). Le curve *C4* e *C5* hanno un punto comune A, appartenente ad un asse; si trovino le equazioni delle tangenti alle curve in A.

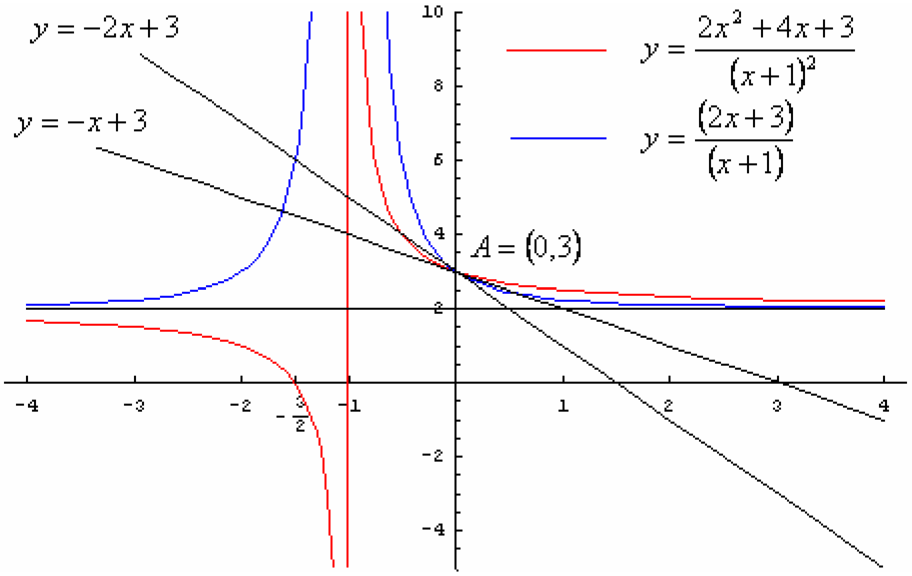
La curva in esame è $y = \frac{2x^2+5x+3}{(x+1)^2}$. Innanzitutto notiamo che essa può essere scritta anche nel seguente modo $y = \frac{(2x+3)}{(x+1)}$ e cioè nella forma di una funzione omografica senza perdere alcuna informazione, in quanto il dominio resta inalterato $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Tale funzione sarà positiva in $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (-1, +\infty)$, presenterà la retta $x = -1$ come asintoto verticale, la retta $y = 2$ come asintoto orizzontale e sarà sempre decrescente. Il grafico è sotto presentato:



Come si nota dall'equazione del luogo $y = \frac{2x^2 + ax + 3}{(x+1)^2}$, posto $a' \neq a$, tutte le curve del luogo hanno in comune il punto ad ascissa $x = 0$ cui corrisponde $y = 3$. Infatti $\frac{2x^2 + ax + 3}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + a'x + 3}{(x+1)^2} \Leftrightarrow 2x^2 + ax + 3 = 2x^2 + a'x + 3 \Leftrightarrow (a - a')x = 0 \Rightarrow x = 0$ essendo per ipotesi $a' \neq a$.

Calcoliamo la tangente in $A = (0,3)$ alla curva $C_4 : y = \frac{2x^2 + 4x + 3}{(x+1)^2}$. Essa ha equazione $y = mx + 3$ con $m = y'(0) = \left[-\frac{2}{(x+1)^3}\right]_{x=0} = -2$ per cui la tangente è $y = -2x + 3$.

Calcoliamo la tangente in $A = (0,3)$ alla curva $C_5 : y = \frac{2x^2 + 5x + 3}{(x+1)^2} = \frac{(2x+3)}{(x+1)} = 2 + \frac{1}{(x+1)}$. Essa ha equazione $y = mx + 3$ con $m = y'(0)$. La derivata della funzione è $y' = -\frac{1}{(x+1)^2}$ per cui $m = y'(0) = -1$ da cui la tangente è $y = -x + 3$.



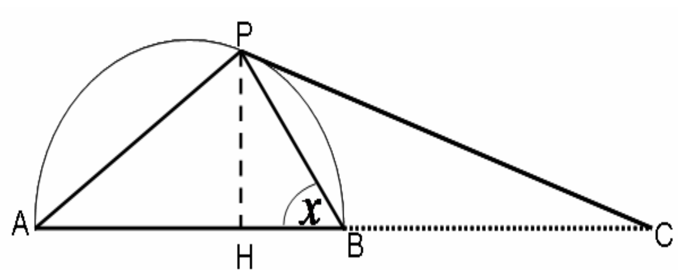
PROBLEMA 2

Data una semicirconferenza di diametro AB = 2 r, si prenda sul prolungamento di AB, dalla parte di B, un punto C tale che sia BC = AB. Essendo P un punto della semicirconferenza:

Punto 1

Si esprima per mezzo di r e dell'ampiezza dell'angolo $x = A\hat{P}B$ **il rapporto** $y = \frac{\overline{CP}^2}{\overline{AP} \cdot \overline{PB}}$

Si consideri la figura sottostante, che rappresenta la questione geometrica:



Il triangolo APB, essendo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo, per cui $AP = 2r\sin(x), PB = 2r\cos(x)$.

Ora $CP^2 = PH^2 + HC^2$ con $HC = HB + BC = PB\cos(x) + 2r = 2r(1 + \cos^2(x))$ e $PH = PB\sin(x) = 2r\sin(x)\cos(x)$.

Il rapporto richiesto è

$$y=\frac{\overline{CP}^2}{\overline{AP}\cdot\overline{PB}}=\frac{4r^2\sin^2(x)\cos^2(x)+4r^2\left(1+\cos^2(x)\right)^2}{4r^2\sin(x)\cos(x)}=$$
$$=\frac{4r^2\left[\sin^2(x)\cos^2(x)+1+\cos^4(x)+2\cos^2(x)\right]}{4r^2\sin(x)\cos(x)}=\frac{\cos^2(x)\left(\cos^2(x)+\sin^2(x)\right)+1+2\cos^2(x)}{\sin(x)\cos(x)}=$$
$$=\frac{1+3\cos^2(x)}{\sin(x)\cos(x)}$$

Ora ricordiamo che $\sin(x)\cos(x)=\frac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}, \cos^2(x)=\frac{1}{1+\tan^2(x)}$, per cui il rapporto può essere così scritto:

$$y=\frac{1+3\cos^2(x)}{\sin(x)\cos(x)}=\frac{1+\frac{3}{1+\tan^2(x)}}{\frac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}}=\frac{\tan^2(x)+4}{\tan(x)}=\tan(x)+\frac{4}{\tan(x)}=\tan(x)+4\cot\tan(x)$$

con la restrizione geometrica $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Si noti come il rapporto richiesto sia indipendente dal raggio ma solo funzione dell'angolo.

Punto 2

Si studi nell'intervallo [0, 2π] la funzione *y = f(x)* espressa per mezzo di tg *x*.

Studiamo la funzione $y=\frac{\tan^2(x)+4}{\tan(x)}$ nell'intervallo $[0,2\pi]$:

- *Dominio:* $\begin{cases}\tan(x)\neq 0\\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq k\pi\\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2}, k\in Z$ e particolareggiando all'intervallo di studio $[0,2\pi]$ il dominio sarà: $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\cup\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$.
- *Intersezioni con gli assi:* non ci sono intersezioni con gli assi;
- *Eventuali simmetrie:* $f(-x)=\frac{\tan^2(-x)+4}{\tan(-x)}=\frac{\tan^2(x)+4}{-\tan(x)}=-\frac{\tan^2(x)+4}{\tan(x)}=-f(x)$ per cui la funzione è dispari;
- *Positività:* $y=\frac{\tan^2(x)+4}{\tan(x)}>0\Leftrightarrow\begin{cases}\tan(x)>0\\ x\neq k\frac{\pi}{2}, k=0,1,2,3,4\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$;
- *Asintoti verticali:*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan^2(x)+4}{\tan(x)} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to \pi^+} \frac{\tan^2(x)+4}{\tan(x)} = \frac{4}{0^+} = +\infty, \lim_{x\to \pi^-} \frac{\tan^2(x)+4}{\tan(x)} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2\pi^-} \frac{\tan^2(x)+4}{\tan(x)} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan^2(x)+4}{\tan(x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} [\tan(x)+4\cot\tan(x)] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan^2(x)+4}{\tan(x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} [\tan(x)+4\cot\tan(x)] = +\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}^+} \frac{\tan^2(x)+4}{\tan(x)} = \lim_{x\to \frac{3\pi}{2}^+} [\tan(x)+4\cot\tan(x)] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}^-} \frac{\tan^2(x)+4}{\tan(x)} = \lim_{x\to \frac{3\pi}{2}^-} [\tan(x)+4\cot\tan(x)] = +\infty$$

Quindi le rette di equazione $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi, x = \frac{3\pi}{2}, x = 2\pi$ sono asintoti verticali;

- *Asintoti orizzontali ed obliqui:* non ce ne sono;
- *Crescenza e decrescenza:* $y'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{4}{\sin^2(x)} = \frac{\sin^2(x) - 4\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)} = \frac{\tan^2(x)-4}{\sin^2(x)}$

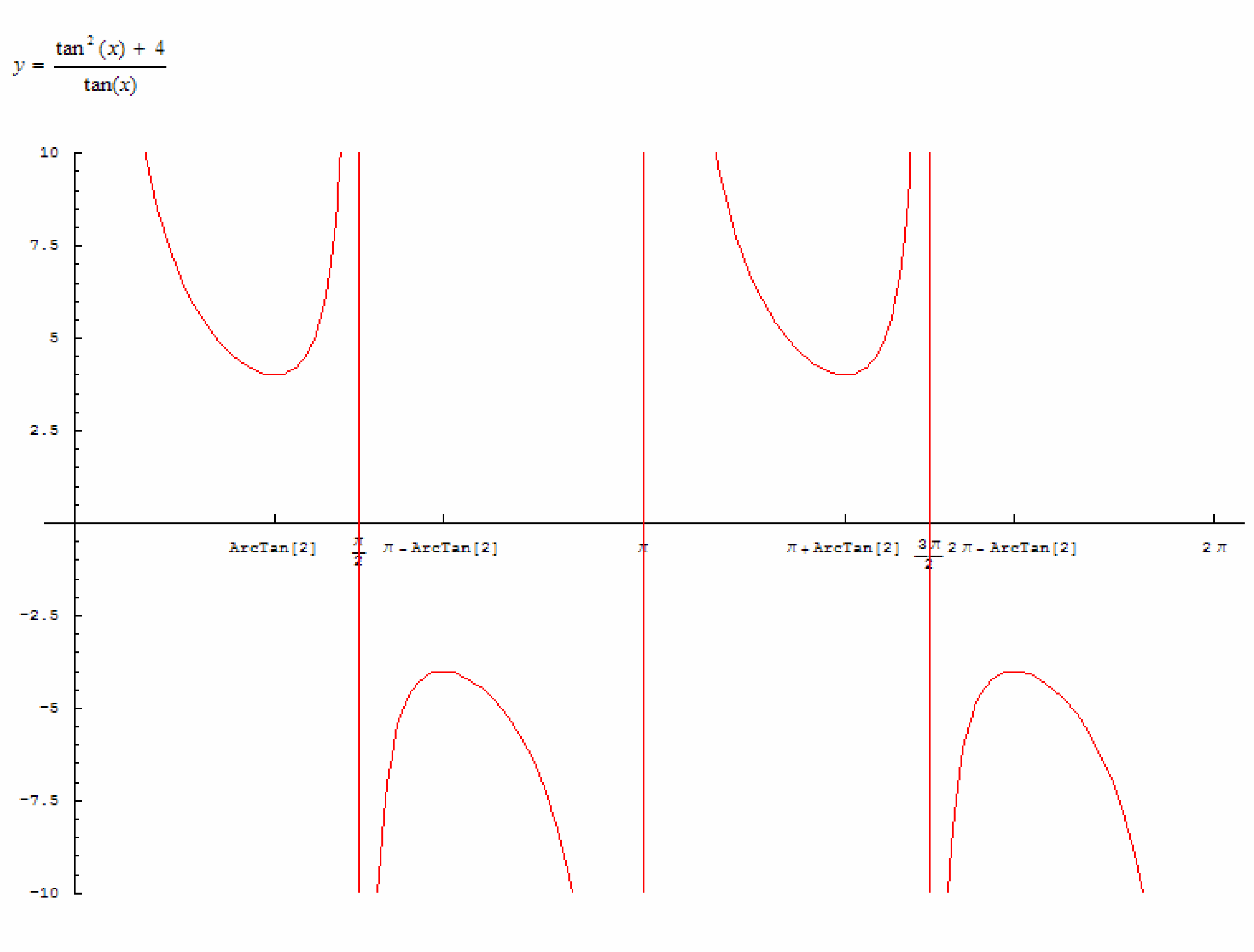
  per cui nel dominio di definizione $y'(x) = \frac{\tan^2(x)-4}{\sin^2(x)} > 0 \Rightarrow \tan^2(x) - 4 > 0 \Rightarrow \tan(x) > 2 \cup \tan(x) < -2$ le cui soluzioni nell'intervallo $[0,2\pi]$ sono:

  $$\arctan(2) < x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{\pi}{2} < x < (\pi - \arctan(2)) \vee (\pi + \arctan(2)) < x < \frac{3\pi}{2} \vee \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi - \arctan(2)$$

  Quindi la funzione presenta i massimi nei punti $(\pi - \arctan(2), -4), (2\pi - \arctan(2), -4)$ ed i minimi nei punti $(\arctan(2), 4), (\pi + \arctan(2), 4)$;

La derivata seconda è $y''(x) = \frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)} + \frac{8\cos(x)}{\sin^3(x)} = \frac{2\sin^4(x) + 8\cos^4(x)}{\sin^3(x)\cos^3(x)}$ per cui essa non si annulla mai, cioè la funzione non presenta flessi.

Il grafico è sotto presentato:



Punto 3

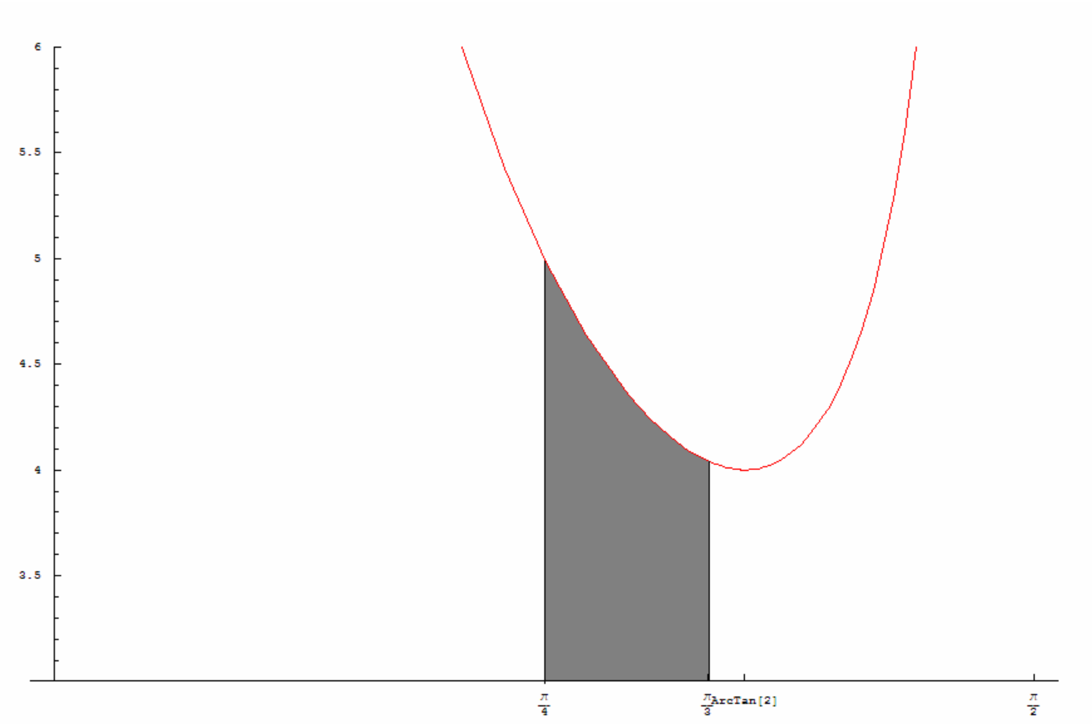
Si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) il valore di *x*, nell'intervallo 0 < *x* < π/2, per cui il rapporto *y* assume valore minimo.

Dalla figura soprastante emerge che il rapporto $y = \frac{\tan^2(x)+4}{\tan(x)}$ nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ assume valore minimo per $x = \arctan(2) \cong 63.4349° \cong 63°26'$.

Punto 4

Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva rappresentativa della funzione *y* = *f(x)*, dell'asse delle ascisse e dalle rette di equazione *x* = π/4 e *x* = π/3.

L'area richiesta è rappresentata nella figura sottostante in grigio:



Tale area è pari a:

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} [\tan(x) + 4\cot\tan(x)]dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + 4\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right] dx =$$

$$= [-\ln|\cos(x)| + 4\ln|\sin(x)|]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \left[\ln\left(\frac{\sin^4(x)}{|\cos(x)|} \right) \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \ln\left(\frac{9}{8}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \ln\left(\frac{9\sqrt{2}}{4}\right)$$

QUESTIONARIO

Quesito 1

Si calcoli il limite della funzione $y=\frac{\log(x+3)-\log(2x+1)}{x^2+x-6}$**, quando *x* tende a 2.**

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ per cui applicando De L'Hospital si ha:

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{\log(x+3)-\log(2x+1)}{x^2+x-6}\right]\overset{\substack{\text{De}\\ \text{L'Hospital}}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{\left(\frac{1}{x+3}-\frac{2}{2x+1}\right)}{2x+1}=\frac{\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\right)}{5}=-\frac{1}{25}$$

Quesito 2

Si calcoli il valore medio della funzione $y=\left|1-x^2\right|$ **nell'intervallo -2 ≤ *x* ≤ 3.**

Ricordando che $\left|1-x^2\right|=\begin{cases}1-x^2 & -1\le x\le 1\\ x^2-1 & x<-1\vee x>1\end{cases}$ il valor medio sarà:

$$V_M=\frac{1}{5}\left[\int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx+\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx+\int_{1}^{3}(x^2-1)dx\right]=\frac{1}{5}\left\{\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-2}^{-1}+\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{1}^{3}\right\}=$$

$$=\frac{1}{5}\left\{\left[-\frac{1}{3}+1+\frac{8}{3}-2\right]+\left[1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right]+\left[9-3-\frac{1}{3}+1\right]\right\}=\frac{1}{5}\left\{\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{20}{3}\right\}=\frac{28}{15}$$

Quesito 3

Data la funzione $y=\sqrt{1-x^2}$**, si stabilisca se sono verificate le condizioni di validità del teorema di Rolle nell'intervallo -1 ≤ *x* ≤ 1 e, in caso affermativo, si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema.**

La funzione $y=\sqrt{1-x^2}$ rappresenta una semicirconferenza di centro l'origine (0,0). Essa è continua in $[-1,1]$ e derivabile in $]-1,1[$; infatti in $x=\pm 1$ presenta le tangenti verticali parallele all'asse delle ordinate. Calcoliamo il punto che soddisfa il teorema di Rolle: va cercato tra i punti che annullano la derivata prima. In particolare $y'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ed essa si annulla in $x=0\in\,]-1,1[$.

Quindi il punto in cui si verifica la tesi del teorema di Rolle è $x=0$.

Quesito 4

Si consideri la seguente preposizione: "Una piramide è retta se la verticale calata dal vertice cade entro il poligono di base". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

Una piramide è retta se il poligono di base è inscrivibile in una circonferenza il cui centro è piede della perpendicolare condotta dal vertice della piramide al piano di base.

Quesito 5

La regione finita di piano delimitata dalla curva di equazione $y=\sqrt{\sin x}$ e dall'asse x nell'intervallo $0 \le x \le \pi$ è la base di un solido S le cui sezioni ottenute con piani perpendicolari all'asse x sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di S.

Il volume richiesto è:

$$V=\int_0^{\pi}\left(\sqrt{\sin(x)}\right)^2 dx=\int_0^{\pi}\sin(x)dx=\left[-\cos(x)\right]_0^{\pi}=2$$

Quesito 6

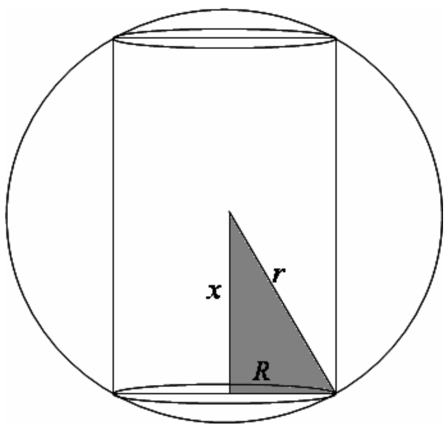
Si verifichi che la curva di equazione $y=\frac{x-1}{x-2}$ è simmetrica rispetto all'intersezione dei suoi asintoti.

La funzione $y=\frac{x-1}{x-2}$ è una funzione omografica di asintoto verticale $x=2$ ed asintoto orizzontale $y=1$. Per cui l'intersezione degli asintoti è $C=(2,1)$. Per verificare la simmetria rispetto al punto $C=(2,1)$ si può applicare la trasformazione $\begin{cases} X=4-x \\ Y=2-y \end{cases}$ per cui sostituendo nella funzione $y=\frac{x-1}{x-2}$ si ha $2-Y=\frac{4-X-1}{4-X-2} \Rightarrow Y=2+\frac{3-X}{X-2}=\frac{X-1}{X-2}$.

Quesito 7

Si inscriva in una sfera di raggio r il cilindro di volume massimo.

Si consideri la figura sottostante in cui abbiamo indicato l'altezza del cilindro pari a $2x$ con $0 \le x \le r$ con r raggio della sfera.



Il raggio di base del cilindro, per il teorema di Pitagora, vale $R=\sqrt{r^2-x^2}$ per cui il volume del cilindro è $V_C(x)=\pi\cdot 2x\cdot\left(r^2-x^2\right)=2\pi\left(xr^2-x^3\right)$. Le derivate della funzione volume sono rispettivamente:

$$V_C^{'}(x) = 2\pi(r^2 - 3x^2)$$
$$V_C^{''}(x) = -12\pi \cdot x$$

Quindi la funzione volume, tenendo presente la limitazione $0 \le x \le r$, è crescente nell'intervallo $\left[0, \frac{r}{\sqrt{3}}\right]$ e decrescente in $\left[\frac{r}{\sqrt{3}}, r\right]$. Inoltre $V_C^{''}\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right) = -12\pi\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right) = -4\pi \cdot r\sqrt{3} < 0$ per cui il volume massimo lo si ha per $x = \frac{r}{\sqrt{3}}$ e vale $V_{C,\max}\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right) = 2\pi\left(\frac{r}{\sqrt{3}}r^2 - \left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^3\right) = \frac{4\pi\sqrt{3} \cdot r^3}{9}$.

Quesito 8

È più probabile ottenere almeno un 6 lanciando quattro volte un dado o ottenere almeno un 12 lanciando ventiquattro volte due dadi?

La probabilità di ottenere 6 in un lancio è $p = \frac{1}{6}$, per cui la probabilità di non ottenere 6 è $(1-p) = \frac{5}{6}$. Quindi la probabilità di ottenere almeno un 6 in 4 lanci è $\Pr\{\text{almeno un 6 in 4 lanci}\} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cong 0.518$.

Analogo discorso vale per il 12: la probabilità di ottenere 12 in un lancio di due dadi è $p = \frac{1}{36}$, per cui la probabilità di non ottenere 6 è $(1-p) = \frac{35}{36}$. Quindi la probabilità di ottenere almeno un 6 in 4 lanci è $\Pr\{\text{almeno un 6 in 4 lanci}\} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \cong 0.491$.

Quindi è più probabile ottenere almeno un 6 lanciando quattro volte un dado che almeno un 12 lanciando ventiquattro volte due dadi.

Quesito 9

Si enunci il quinto postulato di Euclide e si descriva qualche modello di planimetria non euclidea.

L'enunciato del postulato è:

"Si postula che se una retta, incontrante altre due, forma gli angoli interni da una stessa parte minore di due retti, le due rette, prolungate all'infinito, si incontrano dalla parte in cui sono i due angoli minori di due retti."

L'enunciato equivalente è:

"Data una qualsiasi retta r ed un punto P non appartenente ad essa, è possibile tracciare per P una ed una sola retta parallela alla retta r data."

In un contesto non euclideo si possono avere due possibilità:

- **Geometria ellittica:** la parallela dal vertice non esiste e la somma degli angoli interni è maggiore dell'angolo piatto, ed i lati non sono segmenti ma archi di circonferenza:
- **Geometria iperbolica:** la parallela dal vertice esiste e non è unica, e la somma degli angoli interni è minore dell'angolo piatto, ed i lati non sono segmenti ma archi di iperboli perpendicolari al cerchio esterno:

Quesito 10

Si trovi per quali valori di k ammetta soluzione l'equazione trigonometrica: sen*x* + cos*x*=k.

Ricordando l'identità goniometrica fondamentale $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, effettuata la trasformazione $\begin{cases} X = \cos x \\ Y = \sin x \end{cases}$, il quesito si riconduce a trovare i valori del parametro k per i quali ha soluzioni il sistema $\begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ X + Y = k \end{cases}$. Il sistema da risolvere è l'intersezione tra la circonferenza di centro l'origine e raggio unitario ed un fascio improprio di rette parallele alla bisettrice del secondo e quarto quadrante. Innanzitutto troviamo i valori di k per cui il fascio è tangente alla circonferenza. Sostituendo l'equazione del fascio nell'equazione della circonferenza si ha: $X^2 + (k - X)^2 = 1$ da cui $2X^2 - 2kX + k^2 - 1 = 0$. Imponendo che il discriminante sia nullo si ha $k^2 - 2(k^2 - 1) = 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{2}$. Quindi abbiamo ottenuto la retta di equazione $X + Y = \sqrt{2}$ tangente alla circonferenza nel primo quadrante e la retta di equazione $X + Y = -\sqrt{2}$ tangente alla circonferenza nel terzo quadrante come sotto rappresentato. Si deduce che l'equazione $\sin x + \cos x = k$ ha due soluzioni se e solo se $-\sqrt{2} \le k \le \sqrt{2}$: in particolare le due soluzioni sono distinte se $-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$ e coincidenti per $k = \pm\sqrt{2}$. Per $k = \sqrt{2}$ le due soluzioni sono $x = \frac{\pi}{4}$ mentre $k = -\sqrt{2}$ le due soluzioni sono $x = \frac{5\pi}{4}$.