ESAME DI STATO 2011 SECONDA PROVA SCRITTA PER I LICEI SCIENTIFICI A INDIRIZZO SPERIMENTALE (PNI)

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali da $f(x) = x + \ln 4 + \dfrac{2}{e^x + 1}$ e sia Γ la sua rappresentazione grafica nel sistema di riferimento *Oxy*.

1. Si determini il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ e a $-\infty$. Si calcoli $f(x) + f(-x)$ e si spieghi perché dal risultato si può dedurre che il punto $A(0; 1 + \ln 4)$ è centro di simmetria di Γ.
2. Si provi che, per tutti i reali m, l'equazione $f(x) = m$ ammette una e una sola soluzione in $\mathbf{R}$. Sia α la soluzione dell'equazione $f(x) = 3$; per quale valore di m il numero $-\alpha$ è soluzione dell'equazione $f(x) = m$?
3. Si provi che, per tutti gli x reali, è: $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$. Si provi altresì che la retta r di equazione $y = x + \ln 4$ e la retta s di equazione $y = x + 2 + \ln 4$ sono asintoti di Γ e che Γ è interamente compresa nella striscia piana delimitata da r e da s.
4. Posto $I(\beta) = \int_0^\beta \left[f(x) - x - \ln 4 \right] dx$, si calcoli: $\lim_{\beta \to +\infty} I(\beta)$. Qual è il significato geometrico del risultato ottenuto?

PROBLEMA 2

Per il progetto di una piscina, un architetto si ispira alle funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 16x \qquad \text{e} \qquad g(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x$$

1. Si studino le funzioni f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy. Si considerino i punti del grafico di g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-10; 10]$ e se ne indichino le coordinate.
2. L'architetto rappresenta la superficie libera dell'acqua nella piscina con la regione R delimitata dai grafici di f e di g sull'intervallo $[0; 4]$. Si calcoli l'area di R.
3. Ai bordi della piscina, nei punti di intersezione del contorno di R con le rette $y = -15$ e $y = -5$, l'architetto progetta di collocare dei fari per illuminare la superficie dell'acqua. Si calcolino le ascisse di tali punti (è sufficiente un'approssimazione a meno di 10^{-1}).
4. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y, la misura della profondità dell'acqua nella piscina è data da $h(x) = 5 - x$. Quale sarà il volume d'acqua nella piscina? Quanti litri d'acqua saranno necessari per riempire la piscina se tutte le misure sono espresse in metri?

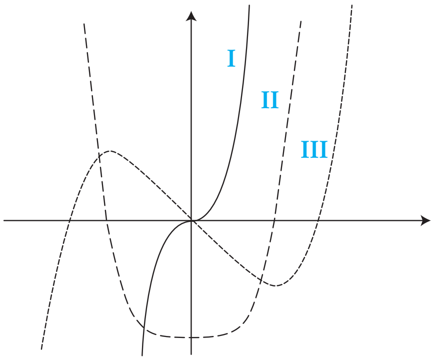
QUESTIONARIO

1. Silvia, che ha frequentato un indirizzo sperimentale di liceo scientifico, sta dicendo ad una sua amica che la *geometria euclidea* non è più vera perché per descrivere la realtà del mondo che ci circonda occorrono modelli di *geometria non euclidea*. Silvia ha ragione? Si motivi la risposta.
2. Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate $(4; 0)$.
3. Sia R la regione delimitata, per $x \in [0, \pi]$, dalla curva $y = \operatorname{sen} x$ e dall'asse x e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y. Si calcoli il volume di W.
4. Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n.
5. In una delle sue opere G. Galilei fa porre da Salviati, uno dei personaggi, la seguente questione riguardante l'insieme N dei numeri naturali («i numeri tutti»). Dice Salviati: «… se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?». Come si può rispondere all'interrogativo posto e con quali argomentazioni?
6. Di tutti i coni inscritti in una sfera di raggio 10 cm, qual è quello di superficie laterale massima?
7. Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Quale è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?
8. In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perchè è citato così spesso?

9. Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

10. Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione f, un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f''. Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?

	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II



Si motivi la risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

1. I limiti possono essere calcolati per via elementare osservando che $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^x+1}=2$ e $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+1}=0$: quindi

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}\right)=-\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}\right)=+\infty.$$

Per quanto riguarda la somma $f(x)+f(-x)$, da $f(-x)=-x+\ln 4+\frac{2}{e^{-x}+1}=$ $=\ln 4-x+\frac{2e^x}{1+e^x}$ si ottiene:

$$f(x)+f(-x)=2\ln 4+\frac{2}{e^x+1}+\frac{2e^x}{1+e^x}=2(\ln 4+1).$$

Il punto A è il centro di simmetria di Γ. Infatti un punto $P'(x'; y')$ corrisponde nella simmetria di centro A al punto $P(x; y)$ se A è il punto medio del segmento PP', cioè se $A = \left(\dfrac{x+x'}{2}; \dfrac{y+y'}{2}\right)$.

Se P è un generico punto di Γ, si ha $P = (x; f(x))$ e $P' = (-x; f(-x))$, da cui
$A = \left(\dfrac{x-x}{2}; \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}\right) = \left(0; \dfrac{2(1+\ln 4)}{2}\right) = (0; 1+\ln 4)$.

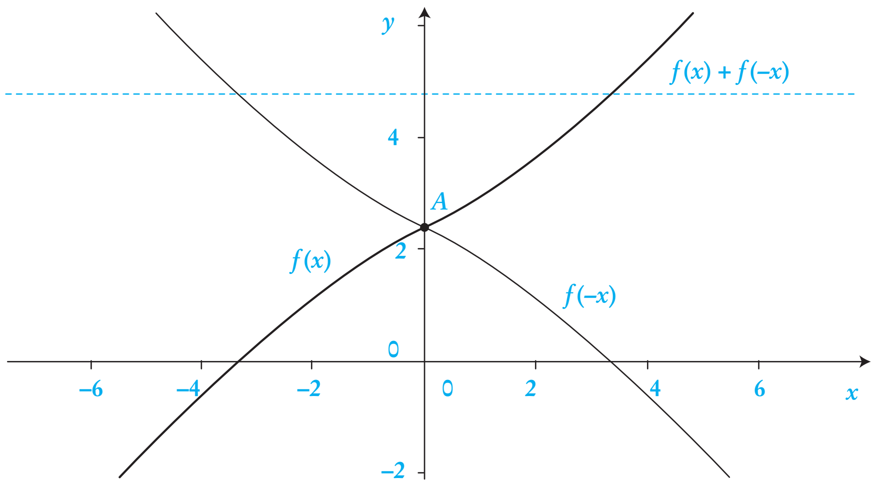


Figura 1

Analizziamo sinteticamente le caratteristiche principali della funzione $f(x)$, anche se la cosa non è richiesta in questo punto. La funzione (figura 1) è definita su tutto $\boldsymbol{R}$, è continua e monotòna crescente (poiché $\forall x \in \boldsymbol{R}$ si ha $f'(x) = 1 - \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2} > 0$), interseca l'asse delle ordinate nel punto $A(0;\ 1 + \ln 4)$ e ammette due asintoti obliqui che possono essere determinati senza difficoltà. Infatti, in base ai limiti precedenti, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right) =$
$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln 4 + \dfrac{2}{e^x+1}\right) = \ln 4 + 2$, mentre $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln 4 + \dfrac{2}{e^x+1}\right) =$
$= \ln 4$. Perciò le rette $y = x + \ln 4 + 2$ ed $y = x + \ln 4$ sono asintoti obliqui al tendere di x rispettivamente a $-\infty$ e a $+\infty$.

2. Poiché l'immagine di f è l'insieme $\boldsymbol{R}$ e f è strettamente crescente, per il teorema dell'esistenza degli zeri delle funzioni continue si ha: $\forall m \in \boldsymbol{R}\ \exists!\ x_0 \in \boldsymbol{R}$ tale che $f(x_0) = m$.

Posto $f(\alpha) = 3$, si deve calcolare il valore di $f(-\alpha)$; per il punto 1 si ha $f(\alpha) + f(-\alpha) = 2\,(1 + \ln 4)$, da cui $f(-\alpha) = 2\,(1 + \ln 4) - f(\alpha) = 2\ln 4 - 1$, che è il valore di m richiesto.

3. Per verificare che $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$ è sufficiente verificare l'uguaglianza $2 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1} = \dfrac{2}{e^x + 1}$, banalmente vera per $\forall x \in \boldsymbol{R}$.

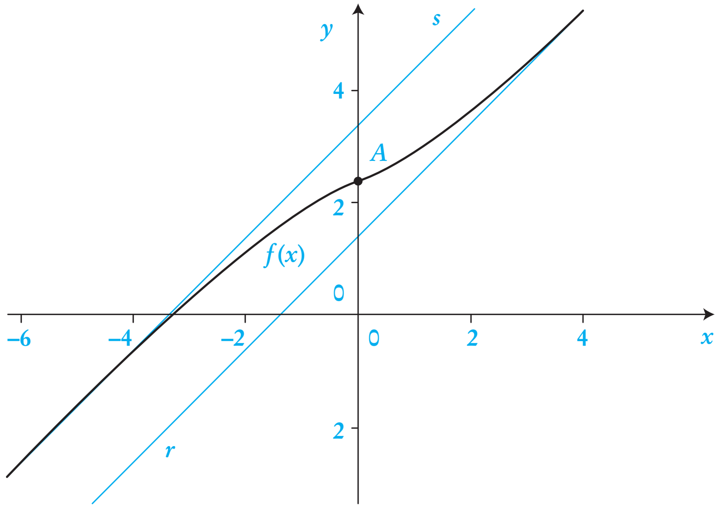


Figura 2

Gli asintoti obliqui sono stati individuati al punto 1; rimane da verificare che Γ è interamente compresa nella striscia di piano delimitata da r ed s. Questo è vero in quanto $\forall x \in \boldsymbol{R}$ si ha:

$$x + \ln 4 < x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} = x + \ln 4 + 2 - \frac{2e^x}{e^x + 1} < x + \ln 4 + 2.$$

4. Calcoliamo prima

$$I(\beta) = \int_0^\beta \left[f(x) - x - \ln 4 \right] dx = \int_0^\beta \left[2 - \frac{2e^x}{e^x + 1} \right] dx = 2\beta - 2\ln(e^\beta + 1) + 2\ln 2.$$

Ne segue:

$$\lim_{\beta \to +\infty} I(\beta) = \lim_{\beta \to +\infty} \left[2\beta - 2\ln(e^\beta + 1) + 2\ln 2 \right] =$$

$$= \lim_{\beta \to +\infty} 2 \left[\ln e^\beta - \ln(e^\beta + 1) + \ln 2 \right] = \lim_{\beta \to +\infty} 2 \left[\ln \frac{e^\beta}{e^\beta + 1} + \ln 2 \right] = 2\ln 2 = \ln 4.$$

Geometricamente, il risultato ottenuto rappresenta l'area della parte di piano compresa tra l'asse delle y, l'asintoto r e Γ (si tratta di un integrale generalizzato perché la parte di piano non è limitata).

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

Il problema 2 è una variante del problema 1 del tema di ordinamento; si rimanda quindi all'articolo precedente per altre osservazioni e commenti.

1. $f(x) = x^3 - 16x$ è una funzione polinomiale dispari; il dominio è $\mathbf{R}$; la funzione si annulla se x vale 0, 4 e -4. La derivata è $f'(x) = 3x^2 - 16$; pertanto esistono un punto di minimo in $A\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}; -\frac{128\sqrt{3}}{9}\right)$ e uno di massimo in $B\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{128\sqrt{3}}{9}\right)$; la funzione ammette inoltre un punto di flesso nell'origine degli assi. Ovviamente non ci sono asintoti.
Anche la funzione $g(x) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x$ ha un andamento noto: il suo grafico si ottiene da quello della funzione seno, «dilatato» nella direzione dell'asse x di un fattore $2/\pi$; pertanto la funzione è periodica con periodo 4.
Restringendo lo studio all'intervallo [0; 4] si trovano tre zeri in $x = 0$, $x = 2$ e $x = 4$, un punto di massimo in $C(1; 1)$, un punto di minimo in $D(3; -1)$ e un punto di flesso in $E(2; 0)$.
I grafici sono illustrati in figura 3.

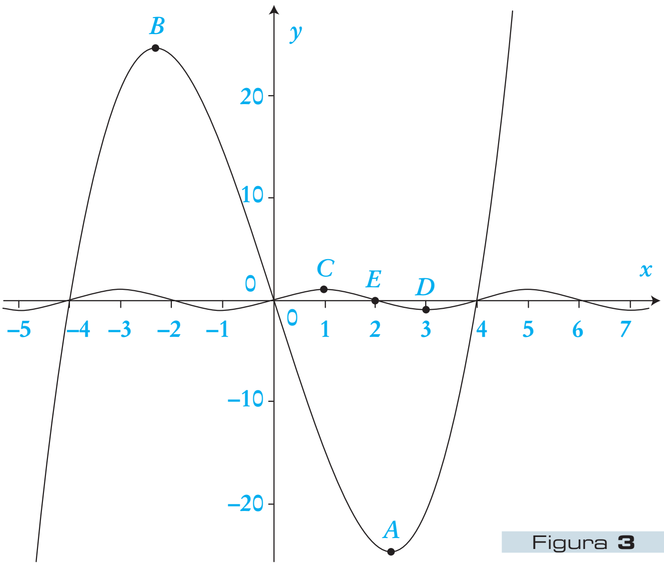


Figura 3

I punti di g a tangente orizzontale sono i punti di massimo e di minimo: oltre a C e D già detti, ci sono i punti (–9; –1), (–7; 1), (–5; –1), (–3; 1), (–1; –1), (5; 1), (7; –1) e (9; 1).

2. Data la simmetria di $g(x)$ rispetto al punto (2; 0), si ha $\int_0^4 g(x)\,dx = 0$. È quindi sufficiente calcolare $-\int_0^4 f(x)\,dx = 64$.

3. I punti con ordinata $y = -15$ risolvono l'equazione $x^3 - 16x + 15 = 0$, che può essere riscritta come $(x-1)(x^2+x-15) = 0$ ed ammette le soluzioni $x = 1$, $x = \frac{-1-\sqrt{61}}{2}$ e $x = \frac{-1+\sqrt{61}}{2}$. Di queste tre soluzioni, va scartata la seconda che non corrisponde a un punto sul bordo di R.
I punti con ordinata $y = -5$ risolvono l'equazione $x^3 - 16x + 5 = 0$. Dall'esame del grafico segue che la funzione $h(x) = x^3 - 16x + 5$ ammette tre zeri, di cui due compresi nell'intervallo [0; 4], ricavabili con un metodo di approssimazione numerica.
La tabella riporta i calcoli per trovare il primo zero $x_1 = 0{,}31\ldots$ con il metodo di bisezione partendo da $a = 0$ e $b = 1$.

a	b	$h(a)$	$h(b)$	$c = \frac{a+b}{2}$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$	$h(c)$
0	1	5	-10	0,5	0,5	-2,875
0	0,5	5	-2,875	0,25	0,25	1,01563
0,25	0,5	1,01563	-2,875	0,375	0,125	-0,9473
0,25	0,375	1,01563	-0,9473	0,3125	0,0625	0,03052
0,3125	0,375	0,03052	-0,9473	0,34375	0,03125	-0,4594

In modo analogo, o usando altri metodi, si trova $x_2 = 3{,}83\ldots$ (non è invece accettabile la soluzione $x_3 = -4{,}1\ldots$).

4. Il volume si calcola ricorrendo al «metodo delle fette» (si veda il tema d'ordinamento). Si ottiene

$$\int_0^4 \big(g(x) - f(x)\big)\cdot(5-x)\,dx = \frac{8}{\pi} + \frac{2752}{15}.$$

Quindi saranno necessari circa 186 013 litri d'acqua.

Per i **quesiti 4 e 8** si veda il tema di ordinamento.

1. Il quesito, espresso in forma ambigua, in realtà coinvolge due problemi, entrambi piuttosto complessi e per i quali una trattazione corretta sembra ben al di là sia delle competenze che può avere uno studente, sia dei tempi concessi per la risposta ad un singolo quesito.
Primo problema: la geometria euclidea è vera o falsa?
Prima dell'introduzione delle geometrie non euclidee si pensava che gli assiomi della geometria di Euclide fossero *veri*, perché evidenti descrizioni del mondo fisico. Poiché una dimostrazione permette di dedurre da premesse vere conseguenze che hanno lo stesso grado di verità, dall'assunzione di verità degli assiomi derivava la verità dell'intera teoria. Ma in seguito alla scoperta delle geometrie non euclidee, il concetto di «vero» in matematica subisce una profonda crisi e prende il significato di «logicamente valido».
La geometria di Bolyai e Lobačevskij mostra come, sostituendo il quinto postulato con una sua negazione, non si ottengano contraddizioni, ma solo teoremi «diversi». Ad esempio, nella geometria iperbolica la somma degli angoli di un triangolo è minore di un angolo piatto.
Un'importante evoluzione si ha con Beltrami, Klein e Riemann e poi con Poincaré. In sostanza si dimostra che, all'interno dello spazio tridimensionale euclideo, esistono superfici che sono modelli per le geometrie non euclidee. Pertanto geometrie non euclidee e geometria euclidea hanno lo stesso «grado di verità».
Secondo problema: qual è la «vera» geometria dello spazio fisico in cui viviamo, o, meglio, qual è la più adeguata a descriverlo?
Qui la questione è più complessa, perché coinvolge questioni difficili di relatività generale e di cosmologia. In sintesi, la geometria dello spazio-tempo è variabile: molto lontano da masse la curvatura è nulla e la geometria è *localmente* euclidea, vicino a una massa lo spazio «si incurva» e la sua geometria non è euclidea. Quale sia la curvatura media globale dell'universo è questione aperta. In ogni caso, c'è da dire che nel «piccolo» i risultati delle tre geometrie differiscono di poco; quindi per studiare i fenomeni della vita di tutti i giorni la geometria euclidea va più che bene.

2. Consideriamo (figura 4) un generico punto P sulla curva $y = \sqrt{x}$, di coordinate $\left(p;\ \sqrt{p}\right)$ con $p > 0$.
Minimizzare la distanza da $A(4;0)$ equivale a minimizzare il suo quadrato: $f(p) = d^2(A,P) = (4-p)^2 + \sqrt{p}^{\,2} = p^2 - 7p + 16$. Il minimo di f, il cui grafico è una parabola, si ha per $p = \dfrac{7}{2}$, ascissa del vertice. In alternativa, si può ricorrere alla derivata.

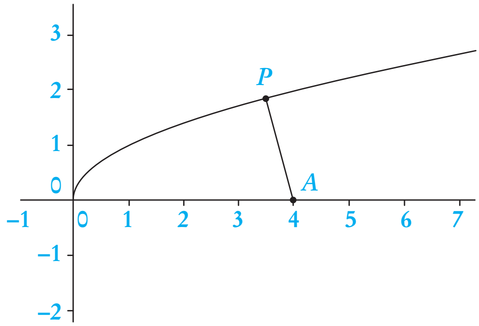


Figura 4

Il punto a distanza minima è quindi $B = \left(\frac{7}{2}; \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$. Per un diverso approccio, si veda il quesito 2 del tema d'ordinamento.

3. La risposta a questo quesito può essere più o meno laboriosa, a seconda del metodo scelto. Un metodo adeguato al caso in questione è quello dei *gusci cilindrici*, analogo al *metodo delle sezioni o delle fette* (si veda il problema 1 di ordinamento). Il metodo è basato sulla decomposizione del volume cercato in «elementi di volume» calcolabili in modo elementare e nel calcolo del volume complessivo tramite un integrale.
Metodo 1. Gli «elementi di volume» sono gusci cilindrici concentrici (si veda la figura 5), il cui volume è approssimato dal *prodotto dell'area della superficie laterale del cilindro esterno per lo spessore del guscio*: $\Delta V_i \approx Area(S_i)\,\Delta x_i$ dove, nel nostro caso, $Area(S_i) = 2\pi \cdot x_i \cdot f(x_i)$ e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Si ha allora $V \approx \sum_{i=1}^{n} Area(S_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \cdot x_i \cdot f(x_i)\,\Delta x_i$.

Passando quindi al limite per $n \to +\infty$ e contemporaneamente per $\Delta x_i \to 0$, in base alla definizione di Cauchy si ottiene l'integrale definito che fornisce il volume $V = 2\pi \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx$.

L'integrale si calcola per parti; il risultato è $V = 2\pi^2$.
Variante. Sezionando il solido con piani perpendicolari all'asse delle y si ottengono corone circolari con raggio interno pari ad $r = \operatorname{arcsen} y$ e raggio esterno pari a $R = \pi - \operatorname{arcsen} y$. Il volume è quindi dato dall'area della corona circolare per la distanza Δy tra le sezioni:

$$\pi(R^2 - r^2)\,\Delta y = \pi((\pi - \operatorname{arcsen} y)^2 - \operatorname{arcsen}^2 y)\,\Delta y = \pi^2(\pi - 2\operatorname{arcsen} y)\,\Delta y.$$

Integrando si ottiene il volume: $V = \pi^2 \int_0^1 (\pi - 2 \operatorname{arcsen} y)\,dy = 2\pi^2$ (l'integrale della funzione $\operatorname{arcsen} y$ si calcola per parti).

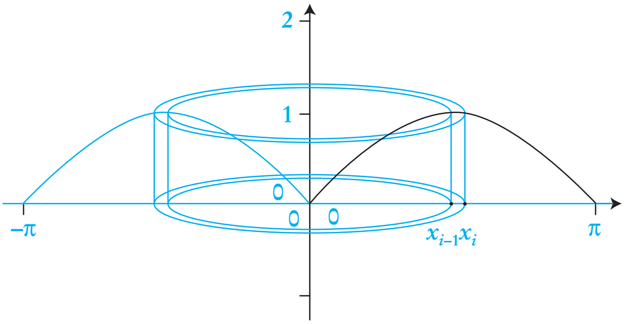


Figura 5

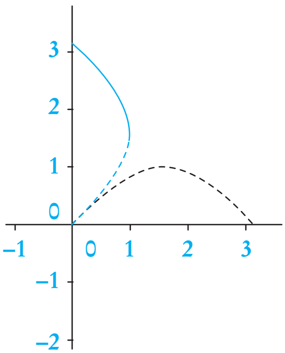


Figura 6

Metodo 2. Con la simmetria rispetto alla bisettrice del primo quadrante, la curva Γ si trasforma in una nuova curva Γ': la rotazione di Γ attorno all'asse y equivale alla rotazione di Γ' attorno all'asse x.
La curva Γ' è però ora descritta da due funzioni: $x = f(y) = \text{arcsen } y$ e $g(y) = \pi - \text{arcsen } y$.
Il volume risulta dal calcolo seguente:

$$V = \pi\int_0^1 (\pi - \text{arcsen } y)^2 dy - \pi\int_0^1 \text{arcsen}^2 y \, dy = \pi^2 \int_0^1 (\pi - 2\text{arcsen } y)\, dy = 2\pi^2.$$

Metodo 3. Si utilizza il teorema di Guldino: *il volume di un solido generato dalla rotazione di una figura piana attorno ad una retta che appartiene al piano della figura senza intersecarla è uguale al prodotto dell'area di questa figura per la lunghezza della curva descritta nella rotazione dal baricentro della figura stessa.*
Il baricentro della regione R si trova sul suo asse di simmetria di equazione $x = \dfrac{\pi}{2}$ e descrive quindi una circonferenza lunga π^2. L'area della regione R è $\displaystyle\int_0^\pi \text{sen } x\, dx = 2$.

Il teorema di Guldino fornisce direttamente la risposta: $V = 2\pi^2$.

5. Cantor dà la risposta, chiarendo, nell'ambito della teoria degli insiemi, che il confronto per inclusione è diverso dal confronto tra cardinalità. È possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei naturali N e l'insieme dei *quadrati* dei naturali: $0 \to 0$, $1 \to 1$, $2 \to 4$, $3 \to 9$, … e, in generale, $n \to n^2$. Pertanto, i due insiemi sono *equipotenti* (hanno la stessa cardinalità, cioè lo stesso numero di elementi), nonostante l'insieme dei quadrati sia un *sottoinsieme proprio* dell'insieme dei naturali.

6. Poniamo $\overline{OH} = x$, con $0 < x < 10$. Per il teorema di Pitagora (figura 7) si ha: $\overline{HC} = \sqrt{100 - x^2}$ e $\overline{AC} = \sqrt{(10 + x)^2 + 100 - x^2} = 2\sqrt{5(x + 10)}$.

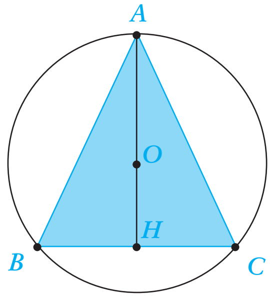


Figura 7

L'area della superficie laterale del cono, in cm^2, è:

$$S_l = \pi \cdot \overline{HC} \cdot \overline{AC} = 2\pi\sqrt{5(x+10)}\,\sqrt{100 - x^2}.$$

Poiché $S'_l = 5\pi \dfrac{-3x^2 - 20x + 100}{\sqrt{5(x+10)(100 - x^2)}}$, rapidi calcoli permettono di concludere che la superficie laterale massima si ha per $x = 10/3$ cm, cioè per il cono di altezza pari a 40/3 cm.

7. Si tratta di un'applicazione classica della distribuzione binomiale.
Per una singola domanda, la probabilità di risposta esatta è $p = 1/4$, di risposta errata $q = 3/4$.
P («almeno due risposte corrette») =
= 1 – P («nessuna risposta corretta») – P («una sola risposta corretta»).

P («nessuna risposta corretta») = $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10}$

P («una sola risposta corretta») = $10 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^9$

In conclusione: P («almeno due risposte corrette») = $1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^{10} - \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^9 \approx 0.76$.

9. Il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti A e B è il *piano assiale* del segmento AB, cioè il piano perpendicolare ad AB passante per il punto medio di AB. Il luogo cercato è l'intersezione dei piani assiali dei tre lati del triangolo: cioè una retta perpendicolare al piano contenente il triangolo.
Prendiamo infatti due piani assiali: sia α il piano assiale del lato a e sia β il piano assiale del lato b; allora α e β sono perpendicolari al piano del triangolo, e le loro intersezioni con il piano stesso sono gli assi di a e b, che individuano il circocentro del triangolo. L'intersezione di α e β (che costituisce il luogo di cui si parla) è la retta perpendicolare al piano del triangolo, passante per il suo circocentro; nel caso di un triangolo rettangolo il circocentro è il punto medio dell'ipotenusa.
Allo stesso risultato si può arrivare per via analitica.

10. La risposta corretta è la D. Infatti:

- la funzione III ammette due punti di massimo e minimo in corrispondenza agli zeri di II; inoltre, tra i punti di massimo e di minimo III è monotona decrescente, e II è negativa nello stesso intervallo;
- la funzione III presenta un punto di flesso in corrispondenza allo zero di I e, dove I è negativa, la concavità di III è rivolta verso il basso.

I casi A e B sono errati: essendo la funzione I crescente, la sua derivata non può essere negativa. Nel caso C la funzione II presenta un solo punto stazionario per $x = 0$, quindi III, sua derivata, non può avere più di uno zero. Anche il caso E va scartato, poiché per III l'origine non è un punto a tangente orizzontale ma I, sua derivata, vi si annulla.

COMMENTI

Il tema proposto, per quanto riguarda sia i problemi sia i quesiti, era complessivamente alla portata degli studenti dell'indirizzo PNI.

Quest'anno, così come i due anni precedenti, forse anche in seguito alle richieste degli insegnanti, la prova era basata soprattutto su conoscenze di Analisi: pochi i quesiti strettamente geometrici, quasi assente la trigonometria, nonostante la presenza della funzione seno. Già gli scorsi anni si chiedeva se questa tendenza sarebbe stata confermata, visti i precedenti contraddittori e la mancanza di indicazioni ufficiali. Ancora una volta ribadiamo che sarebbe opportuno un Syllabus che precisi quali siano le conoscenze fondamentali, almeno per ottenere la sufficienza, anche se temiamo che la richiesta cadrà nel vuoto.

Quest'anno è stata proposta come novità una *griglia di correzione* comune; la cosa risulterebbe utile se la griglia fosse contestuale al compito, definita dagli estensori della prova e contenesse proposte di punteggio. Questo porterebbe gli estensori stessi ad essere meno ambigui e più precisi nelle richieste. In tal caso sarebbe possibile provvedere alla correzione in modo più rapido e più equilibrato; invece, una griglia concordata a livello nazionale, costruita dopo aver visto la prova, averla risolta e aver riflettuto adeguatamente su di essa, ritarda i tempi di correzione e di fatto intralcia il lavoro delle commissioni, divenendo così poco utile.

I problemi sono articolati per punti, complessivamente indipendenti tra loro, anche se nel problema 1 il rispetto della sequenza guida l'alunno in un percorso più efficace.

Il primo problema è un classico problema di analisi: non del tutto banali per uno studente medio i primi due punti, che richiedono una certa disinvoltura nella manipolazione simbolica. Questo può aver spaventato molti studenti e averli indotti a scegliere il secondo problema, dall'avvio più classico.

Il problema 2 presenta invece un tentativo di applicazione alla realtà facendo riferimento ad un progetto per una piscina. In realtà si tratta di un espediente artificioso, dato che i punti in cui si articola sono classici esercizi di analisi, mascherati da problemi concreti (il riferimento alla piscina non ha alcun ruolo).

Un paio di osservazioni.

- Nel punto 1 si chiede di studiare due funzioni elementari che dovrebbero essere ampiamente note, e quindi non richiedono uno studio vero e proprio tramite l'analisi.

- A molti studenti che hanno svolto la prova è parsa poco significativa la richiesta di indicare le coordinate dei punti a tangente orizzontale compresi nell'intervallo $[-10; 10]$.

I quesiti sono risultati in genere alla portata di allievi di fine liceo, anche se il quesito 1 è difficile da valutare perché confuso e generico: lo studente potrebbe rispondere con una riga o con un intero trattato. Lo stesso si può dire per i quesiti 5 e 8, che però sono espressi in modo più chiaro. Si tratta di aspetti senza dubbio interessanti dal punto di vista culturale, che tuttavia sarebbero più adatti per il colloquio, anche per la loro natura interdisciplinare.

Difficoltà sono sorte nel quesito 3, dato che il metodo «delle fette», che spesso è l'unico in possesso degli studenti, portava ad una risoluzione laboriosa.

Due quesiti riguardano calcolo combinatorio e probabilità, proponendo però situazioni piuttosto semplici. Non si fa invece riferimento ad argomenti come trasformazioni geometriche e vettori, che rivestono un ruolo importante nella matematica che si insegna nel PNI.

Interessante è il quesito 10, in cui si chiede di motivare la risposta scelta lasciando spazio all'argomentazione degli studenti e costringendo i correttori a valutare se un'argomentazione è da ritenersi esauriente oppure no.

Silvia Beltramino
I.I.S. «Arturo Prever» Pinerolo (TO)
silvia.beltramino@gmail.com

Maria Angela Chimetto
Liceo Scientifico «G.B. Quadri» Vicenza
mariangela.ch@libero.it