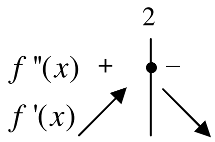
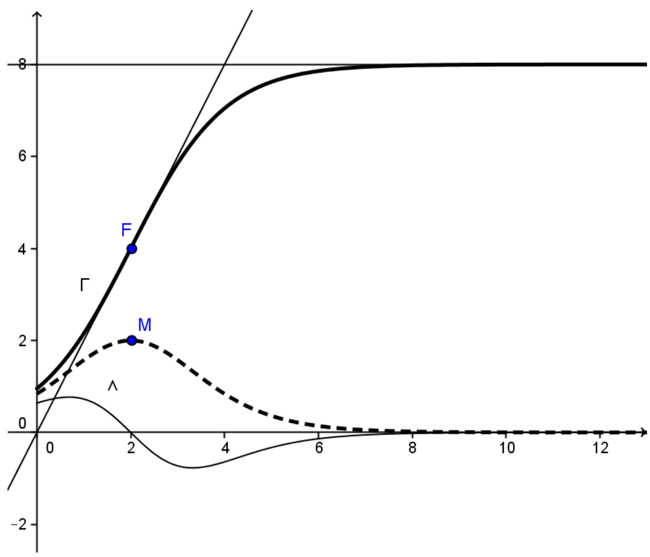
SOLUZIONE PROBLEMA 1



1) Poiché $f''(x) > 0$ in [0; 2) e $f''(x) < 0$ in (2; +∞), si può concludere che $f'(x)$ è crescente in [0; 2) e decrescente in (2; +∞). Inoltre essendo F(2; 4) un flesso, $f''(2) = 0$. Riportando queste informazioni nel prospetto a fianco si deduce che in x = 2 $f'(x)$ presenta un massimo, la cui ordinata è data da $f'(2)$, ovvero dal coefficiente angolare della retta tangente a Γ in F.

Dalle informazioni su tale tangente si deduce subito che la sua pendenza vale m = 2. Quindi il massimo di $f'(x)$ ha coordinate (2; 2).



Per quanto riguarda $f'(0)$, sarà sicuramente compresa fra $f''(0)$ e $f(0)$, dato che $f''(x) \le f'(x) \le f(x)$ $\forall x \in [0;+\infty)$. Dato che $f(x)$ è crescente, la sua derivata $f'(x)$ è positiva in tutto l'intervallo di definizione. Inoltre, per x tendenti a +∞, la $f(x)$ tende verso l'asintoto orizzontale y = 8; pertanto la pendenza del grafico di $f(x)$ tende a quella dell'asintoto orizzontale, cioè a 0. Ciò significa che per x tendenti a +∞, la $f'(x)$ tende verso 0, ovvero che $f'(x)$ ha un asintoto orizzontale in x = 0 per x tendente a +∞. Un possibile andamento di $f'(x)$ sarà quindi quello con linea tratteggiata nella figura a lato.

2) Interpretando le ascisse come il tempo (misurato in ore) e le ordinate come il numero di individui di una popolazione batterica (misurato in milioni), si deduce, dal grafico di $f(x)$, che la popolazione, inizialmente minore di 1 milione di individui subisce una crescita fino a tendere a 8 milioni di individui in modo asintotico (come se si tendesse verso la saturazione delle risorse vitali concesse dall'ambiente in cui la popolazione batterica è coltivata). La concavità verso l'alto a sinistra del flesso indica che la popolazione cresce nelle prime due ore con accelerazione positiva, ovvero con crescente tasso di incremento. Viceversa, la concavità verso il basso a destra del flesso indica una crescita decelerata del numero di individui della popolazione batterica. Nell'istante t = 2 ore, come si evince anche dal grafico di $f'(x)$, si ha il massimo tasso istantaneo di crescita della popolazione.

3) Se $f(x) = \dfrac{a}{1+e^{b-x}}$, i valori dei parametri a e b possono essere ricavati dalle numerose informazioni su $f(x)$ e sulle sue derivate. Per esempio, la presenza

dell'asintoto orizzontale in $y = 8$ si traduce nella condizione $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a}{1+e^{b-x}} = 8$, ovvero dato che $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{b-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^b}{e^x} = 0$, si traduce in $a = 8$.

Si può ora imporre la condizione $f(2) = 4$: $\dfrac{8}{1+e^{b-2}} = 4$; dunque

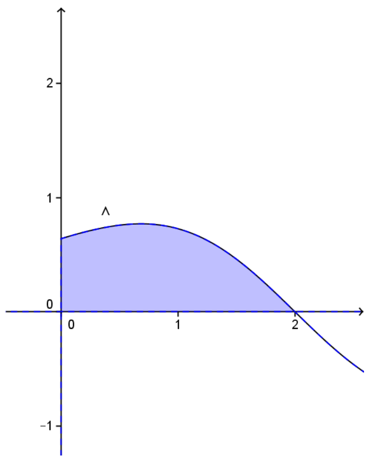
$8 = 4 + 4e^{b-2}$

$e^{b-2} = 1$

$b - 2 = 0$

e quindi $b = 2$.

4) L'area richiesta, dato che la funzione $f''(x)$ è positiva in [0; 2], è data dall'integrale definito di $f''(x)$ fra gli estremi 0 e 2:



$$A = \int_0^2 f''(x)\,dx = \left[f'(x) + k \right]_0^2 = f'(2) - f'(0)$$

Conosciamo già $f'(2) = 2$; inoltre, dall'espressione della derivata prima: $f'(x) = \dfrac{-8e^{b-x} \cdot (-1)}{\left(1+e^{b-x}\right)^2} = \dfrac{8e^{b-x}}{\left(1+e^{b-x}\right)^2}$ si ricava $f'(0) = \dfrac{8e^2}{\left(1+e^2\right)^2}$.

Pertanto, $A = f'(2) - f'(0) = 2 - \dfrac{8e^2}{\left(1+e^2\right)^2} = 2\dfrac{\left(1+e^2\right)^2 - 4e^2}{\left(1+e^2\right)^2} = 2\left(\dfrac{1-e^2}{1+e^2}\right)^2$

PROBLEMA 2

1) Studiamo la funzione assegnata

Dominio: x > 0 (come già richiesto nel testo)

Non ci sono simmetrie

Intersezione con gli assi. Dato il dominio, non esiste alcuna intersezione con l'asse delle ordinate, mentre per l'intersezione con l'asse delle ascisse bisogna risolvere l'equazione: $x^3 \ln(x) = 0$ che ha come soluzione x=1

Segno: poiché $x^3 > 0$ in tutto il dominio e ln(x) >0 per x>1 , f(x)>0 per x>1.

Limiti agli estremi del campo di esistenza: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,

Mentre $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ è una forma indeterminata del tipo $0 * \infty$.

Se scriviamo il limite nella forma $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-3}}$ siamo però nelle condizioni di poter applicare il teorema di De L'Hopital.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-3x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{3}x\right) = 0 \text{; si ha quindi } \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^-$$

Ricerca degli asintoti : Si ha $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, ma anche $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ e dunque non esiste l'asintoto obliquo.

Calcoliamo la derivata prima come prodotto di funzioni :

$$f'(x) = x^3 \frac{1}{x} + 3x^2 \ln(x) = x^2(1+3\ln(x))$$

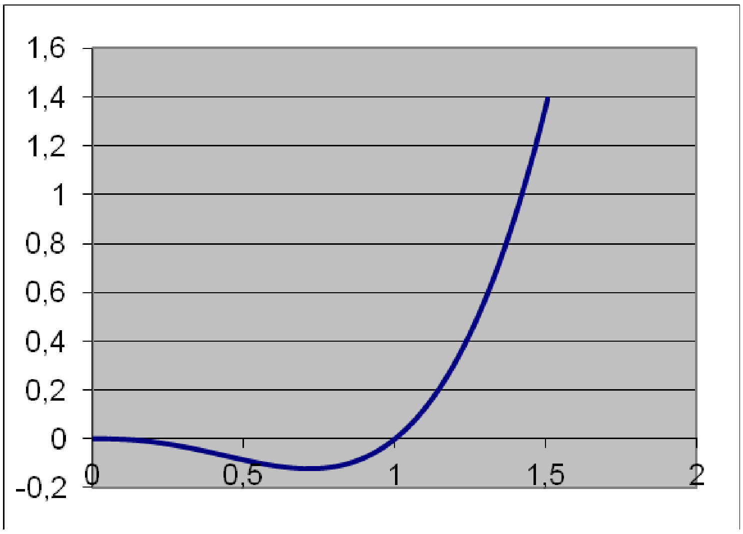
Ovviamente il segno di y' è dato dal segno del 2° fattore.

Si ha $y' \geq 0$ per $\ln(x) \geq -\frac{1}{3}$ cioè $x \geq e^{-\frac{1}{3}}$; la funzione cresce per $x > \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$, decresce per $x < \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ e ha un punto di minimo di ascissa $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ (e, sostituendo, di ordinata $y = -\frac{1}{3e}$). Con la calcolatrice determiniamo (arrotondando come richiesto alla terza cifra decimale) che l'ascissa del punto di minimo vale circa 0.717.

Si ha $f''(x) = 2x(1+3\ln(x)) + x^2\left(\frac{3}{x}\right) = 5x + 6x\ln(x) = x(5+6\ln(x))$

Ricordando che il dominio è l'intervallo $]0 \quad +\infty[$ la derivata seconda è positiva per $x > \frac{1}{\sqrt[6]{e^5}}$ e in tale intervallo la funzione è convessa; $f''(x)$ si annulla in $x = \frac{1}{\sqrt[6]{e^5}}$ (pari a 0.435) dove la funzione ha un flesso; $f''(x)$ è negativa per $0 < x < \frac{1}{\sqrt[6]{e^5}}$: in tale intervallo la funzione è concava.

Sintetizziamo seguente le informazioni raccolte, così da ottenere il grafico a lato :



2) L'equazione generica di una parabola con l'asse parallelo all'asse è $y = g(x) = ax^2 + bx + c$. Per la determinazione dei parametri sappiamo che passa per O, per P(1,0) ed è in P tangente alla funzione .
Dovremo quindi porre

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(1) = 0 \\ g'(1) = f'(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}$$

La parabola ha dunque equazione $y = g(x) = x^2 - x$

3) Poiché la funzione non è definita in x=0, ma è prolungabile per continuità e poiché la funzione nell'intervallo]0 , 1] è negativa, possiamo calcolare l'area di R come

$$\lim_{t \to 0^+} \left(-\int_t^1 f(x)dx \right)$$

L'integrale indefinito da determinare si calcola per parti :

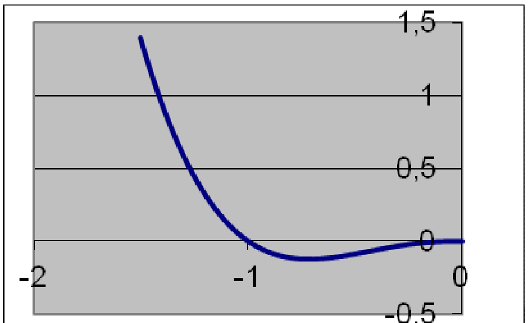
$$\int x^3 \ln(x)dx = \frac{1}{4}x^4 \ln(x) - \frac{1}{4}\int x^4 \frac{1}{x}dx = \frac{1}{4}x^4 \ln(x) - \frac{1}{16}x^4 + k.$$

Dunque l'area richiesta è

$$\lim_{t \to 0^+} \left(-\int_t^1 f(x)dx \right) = -\lim_{t \to 0^+} \left[\frac{1}{4}x^4 \ln(x) - \frac{1}{16}x^4 \right]_t^1 = -\lim_{t \to 0^+} \left[-\frac{1}{16} + \frac{1}{4}t^4 \ln(t) - \frac{1}{16}t^4 \right] = \frac{1}{16}$$

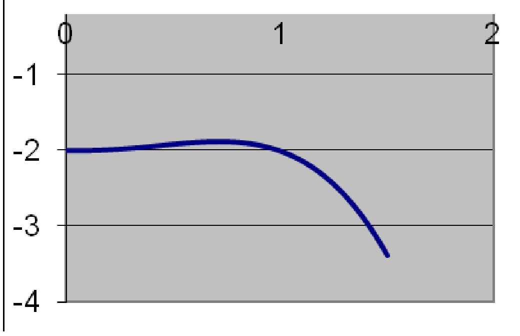
Se l'unità di misura lineare è pari a 1 dm, l'area è pari a $\frac{1}{16}$dm^2 = $\frac{1}{16}10^4$ mm^2=625 mm^2

4) La curva simmetrica rispetto all'asse delle Y di γ ha equazione $y = -x^3 \ln(-x)$ ed ha il grafico qui a lato.



Il sistema che caratterizza una simmetria rispetto alla retta $y = -1$ è $\begin{cases} x' = x \\ y' = -2 - y \end{cases}$

Scrivo la trasformazione inversa
$\begin{cases} x' = x \\ y = -2 - y' \end{cases}$ e sostituisco nella funzione data ottenendo $y = -2 - x^3 \ln(x)$, il cui grafico è quello a lato.

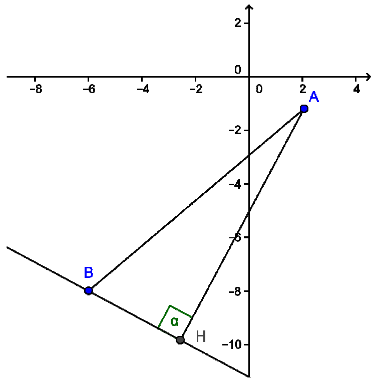


QUESTIONARIO

1. Dalla trigonometria l'area di un triangolo è data dal semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso: $S = \frac{1}{2} ab \sin(\gamma)$. Poiché in questo caso si ha S=3, a=2 e b=3 deduciamo che l'angolo compreso fra a e b è retto. Il teorema di Pitagora ci permette di determinare il terzo lato che è $\sqrt{13}$

2. Detta $g(x) = f(x) - f(2x)$, si ha che $g'(x) = f'(x) - 2f'(2x)$ e di conseguenza le condizioni date sono esprimibili con il sistema $\begin{cases} f'(1) - 2f'(2) = 5 \\ f'(2) - 2f'(4) = 7 \end{cases}$ da cui $f'(1) - 4f'(4) = 19$, che è quanto richiesto.

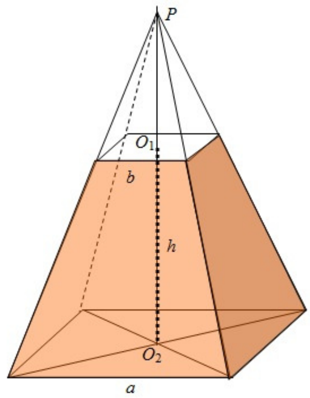
3. Fra le rette passanti per B quella avente distanza massima da A è la retta perpendicolare alla retta AB. Infatti, se si considera la circonferenza di centro A e raggio AB, le rette secanti la circonferenza e passanti per B hanno distanza dal centro minore del raggio; la retta per B con distanza massima da A è la tangente, che ha distanza da A uguale al raggio. Ma la tangente in B è perpendicolare al raggio AB.



   Se il coefficiente angolare di AB è $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-7}{-8} = \frac{7}{8}$, quello delle perpendicolari è $m' = -\frac{8}{7}$ e la retta ha equazione $y + 8 = -\frac{8}{7}(x + 6)$

4. Il volume V richiesto è dato dalla differenza fra il volume V_2 della piramide con area di base a^2, e il volume V_1 della piramide con area di base b^2.

   Dalle proporzioni fra i lati di triangoli isosceli simili che si ottengono con il piano secante perpendicolare alle basi e passante per il vertice P, si ricava che



   $PO_2 : PO_1 = a : b \quad \Rightarrow$

   $(PO_2 - PO_1) : PO_1 = (a-b) : b$

   Quindi $h : PO_1 = (a-b) : b$, da cui $PO_1 = \frac{bh}{(a-b)}$ e

   $PO_2 = h + PO_1 = \frac{ah}{(a-b)}$.

   $$V = V_2 - V_1 = \frac{1}{3}a^2 PO_2 - \frac{1}{3}b^2 PO_1 = \frac{1}{3}h\left(\frac{a^3 - b^3}{a-b}\right) = \frac{1}{3}h\left(a^2 + b^2 + ab\right)$$

5. Sia L la lunghezza del lato di un cubo a temperatura t. Se, a causa di un aumento della temperatura, il lato aumenta del 50% diventando dunque 3/2 L, la superficie

totale passa da $S = 6L^2$ a $S' = 6 \cdot \frac{9}{4} L^2$ (quindi è più che raddoppiata) , mentre il volume passa da $V = L^3$ a $V = \left(\frac{3}{2}L\right)^3 = \frac{27}{8}L^3$ (quindi è più che triplicato). L'affermazione è dunque in generale falsa. È approssimativamente vera solo per piccoli aumenti percentuali.

6. Se mettiamo in ordine i numeri, i primi saranno tutti quelli con la cifra iniziale pari a 1: questi ovviamente sono 6!=720 e altrettanti sono quelli che iniziano con 2. Quello che occupa la 1441-esima posizione è quindi il primo di quelli che iniziano con 3. Sarà dunque 3124567.
   Per determinare quello in posizione 5036 è opportuno comprendere che gli ultimi 6 (=3!) iniziano con 7654. Quindi quello in posizione 5035 è 7654123, mentre quello nella posizione successiva (richiesta) è 7654132.

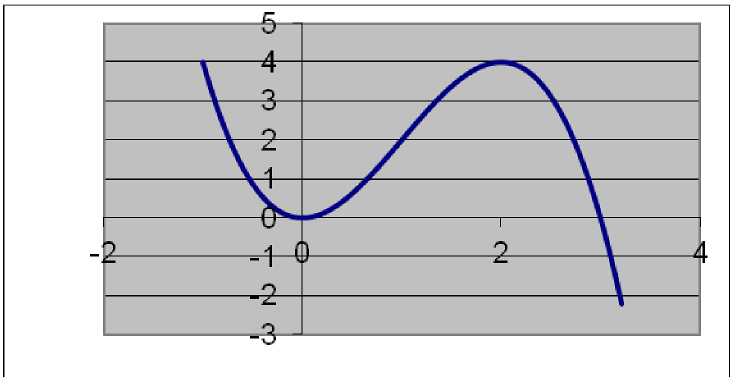
7. Vi sono 4 persone su 10 con gli occhi non azzurri nella prima estrazione; poiché si richiede la probabilità che entrambi non abbiano gli occhi azzurri vuol dire che nella seconda estrazione abbiano 9 persone di cui 3 con gli occhi non azzurri. La probabilità dell'evento richiesto è data quindi da $P(\mathrm{E}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$

8. Operando una sostituzione della variabile e ponendo $t = x - \pi$ si avrà $\lim_{x \to \pi} \frac{e^{\sin(x)} - e^{\sin(\pi)}}{x - \pi} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{\sin(t+\pi)} - 1}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{-\sin(t)} - 1}{t}$ (per una relazione sugli archi associati)
   Riscrivo il limite assegnato, cercando di ricondurmi ai limiti notevoli:
   $\lim_{t \to 0} \frac{e^{-\sin(t)} - 1}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{-\sin(t)} - 1}{-\sin(t)} \cdot \frac{-\sin(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{-\sin(t)} - 1}{-\sin(t)} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{-\sin(t)}{t}$.
   Il primo fattore è 1 in forza del $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ =1 , mentre il secondo, a causa del segno, tende a -1 in forza del limite notevole relativo a sin(x). Si ha dunque che il limite richiesto è -1.
   In alternativa, l'esercizio poteva essere risolto pensando il limite $\lim_{x \to \pi} \frac{e^{\sin x} - e^{\sin \pi}}{x - \pi}$ come la derivata della funzione $y = e^{\sin(x)}$ in x=π. Poiché si ha $y'(x) = \cos(x) e^{\sin(x)}$, $y'(\pi) = \cos(\pi) e^{\sin(\pi)} = -1$

9. I numeri razionali hanno la cardinalità del numerabile: è cioè possibile (come fece Cantor) porli in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali, mentre si deve sempre a Cantor la dimostrazione che l'insieme dei numeri reali ha la cardinalità del continuo, superiore a quella dei numeri naturali. Poiché l'unione

di due insiemi numerabili è ancora numerabile, se i numeri irrazionali avessero la cardinalità del numerabile, tale sarebbe anche la cardinalità dei reali che sono costituiti dall'unione dei razionali con gli irrazionali. Gli irrazionali hanno quindi la cardinalità del continuo ed ha dunque ragione Luisa.

10. Consideriamo la funzione $y = x^2(3-x) = 3x^2 - x^3$: la conoscenza delle cubiche, la semplice determinazione degli zeri della funzione (con x=0 radice con molteplicità 2) ci permette di abbozzare un grafico.



Calcoliamo la derivata prima $y' = 6x - 3x^2 = 3x(2-x)$.

Si individua la presenza di un massimo relativo nel punto di ascissa 2 e ordinata f(2)=4

Risolvere l'equazione $x^2(3-x) = k$ vuol dire determinare le intersezioni fra la curva e la generica retta di equazione y=k. L'analisi grafica ci suggerisce l'esistenza di due soluzioni distinte nell'intervallo [0 , 3] per $0 \leq k < 4$.

Studiamo ora, posto k=3 la funzione $g(x) = f(x) - 3 = 3x^2 - x^3 - 3$, il cui grafico è ottenibile traslando la $f(x)$ di un vettore (0, -3)

Verifichiamo facilmente che la maggiore delle tre soluzioni appartiene all'intervallo [2 , 3]. Infatti f(2)=1>0 mentre f(3)= -3 <0.

Essendo la funzione continua, per il teorema di esistenza degli zeri, essa avrà una soluzione in [2 , 3]. Possiamo applicare il metodo di bisezione ottenendo via via intervalli del tipo [a_n , b_n] di ampiezza decrescente come nello schema seguente :

a_n	b_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$
2	3	1	-3
2,5	3	0,125	-3
2,5	2,75	0,125	-1,10938
2,5	2,625	0,125	-0,41602
2,5	2,5625	0,125	-0,1272
2,53125	2,5625	0,003387	-0,1272
2,53125	2,546875	0,003387	-0,06077
2,53125	2,539063	0,003387	-0,02841

fino ad ottenere la soluzione x=2,53 con due cifre decimali esatte, come richiesto dal testo.

Soluzione a cura dei prof.
Ferrari Alberto, Gregori Silvano, Maestrelli Patrizia
(Liceo Scientifico "Aselli" Cremona)